ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 381, № 1, с. 47–49

МЕХАНИКА

УДК 539.3

О КОЭФФИЦИЕНТЕ СДВИГА В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

© 2001 г. Член-корреспондент РАН Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов

Поступило 21.06.2001 г.

Как известно, в теории оболочек типа Тимошенко для учета неравномерности распределения поперечных сдвигов в сечениях оболочки вводится коэффициент сдвига k [1]. В настоящее время для коэффициента сдвига в основном используются такие значения: $k = \frac{5}{6}$ [2] и $k = \frac{\pi^2}{12}$ [3], которые получены при рассмотрении тонких упругих пластин и хорошо согласуются друг с другом. Ниже показано, что в случае использования подхода [3] (вывод определяющих соотношений осуществляется из принципа виртуальной работы) с последующим восстановлением поперечных компонент тензора напряжений путем интегрирования уравнений пространственной теории упругости более предпочтительным является установление коэффициента сдвига равным $k = 1$. Именно такой выбор позволяет построить математически последовательную и непротиворечивую теорию оболочек типа Тимошенко.

1. Рассмотрим тонкую анизотропную оболочку постоянной толщины h. Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная лицевым поверхностям S^- и S^+. В качестве исходной поверхности S примем какую-либо внутреннюю поверхность оболочки, отстоящую от лицевых поверхностей на расстояниях δ^- и δ^+, т.е. $h = \delta^+ - \delta^-$. Отнесем исходную поверхность к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2, отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Координату α_3 отсчитываем в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S.

Уравнения равновесия линейной теории упругости для тонкой оболочки, у которой метрики лицевых поверхностей можно отождествить с метрикой исходной поверхности, имеют вид

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\alpha_j} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial\alpha_3} + B_i(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + 2B_j\sigma_{ij} + k_i\sigma_{i3} = 0, \quad i \neq j,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3} + B_1\sigma_{13} + B_2\sigma_{23} - k_1\sigma_{11} - k_2\sigma_{22} = 0, \tag{1}$$

где $B_i = \dfrac{\partial A_i/\partial\alpha_j}{A_1A_2}$; $\sigma_{\alpha\beta}$ – напряжения; A_i и k_i – параметры Ламé и кривизны координатных линий; $i, j = 1, 2$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Соотношения обобщенного закона Гука с учетом допущения $\sigma_{33} \ll \sigma_{ij}$ запишем в форме

$$\sigma_{ij} = \sum_{l \le m} b_{ijlm}\varepsilon_{lm}, \quad \sigma_{i3} = \sum_{l} b_{i3l3}\varepsilon_{l3}, \quad i, j, l, m = 1, 2. \tag{2}$$

При построении теории воспользуемся модифицированной гипотезой Тимошенко [4] о линейном распределении перемещений по толщине оболочки

$$u_i = N^-(\alpha_3)v_i^- + N^+(\alpha_3)v_i^+, \quad u_3 = v_3,$$
$$N^-(\alpha_3) = \frac{\delta^+ - \alpha_3}{h}, \quad N^+(\alpha_3) = \frac{\alpha_3 - \delta^-}{h}, \tag{3}$$

где $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ – тангенциальные перемещения лицевых поверхностей $S^\pm$; $v_3(\alpha_1, \alpha_2)$ – поперечное перемещение поверхности S.

Введем перемещения (3) в деформационные соотношения линейной теории упругости и, полагая, что поперечные сдвиги распределены равномерно по толщине оболочки, получим

$$\varepsilon_{ij} = N^-(\alpha_3)e_{ij}^- + N^+(\alpha_3)e_{ij}^+, \quad \varepsilon_{i3} = e_{i3}, \quad \varepsilon_{33} = 0,$$

$$e_{ii}^\pm = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^\pm}{\partial\alpha_i} + B_jv_j^\pm + k_iv_3 \quad i \neq j,$$

Московский государственный технический университет (МАМИ)
Тамбовский государственный технический университет

$$e_{12}^{\pm} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial\alpha_2} - B_2 v_1^{\pm} - B_1 v_2^{\pm}, \quad (4)$$

$$e_{i3} = \beta_i - \theta_i, \quad \beta_i = \frac{1}{h}(v_i^{+} - v_i^{-}),$$

$$\theta_i = k_i v_i - \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_i}, \quad v_i = \frac{1}{2}(v_i^{-} + v_i^{+}).$$

Умножим первые два уравнения равновесия (1) на функции формы $N^{\pm}(\alpha_3)$ и проинтегрируем их вместе с третьим уравнением по поперечной координате от δ^- до δ^+ с учетом граничных условий $\sigma_{\alpha 3}(\delta^{\pm}) = p_{\alpha}^{\pm}$. В результате приходим к уравнениям равновесия оболочки относительно удельных усилий и моментов

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial H_{ii}^{\pm}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ij}^{\pm}}{\partial\alpha_j} + B_i(H_{ii}^{\pm} - H_{jj}^{\pm}) +$$

$$+ 2B_j H_{ij}^{\pm} + \left(\frac{1}{2}k_i \mp \frac{1}{h}\right)T_{i3} = \mp p_i^{\pm}, \quad i \neq j,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{23}}{\partial\alpha_2} + B_1 T_{13} + B_2 T_{23} -$$

$$- k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = p_3^{-} - p_3^{+}, \quad (5)$$

$$H_{ij}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{ij} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \quad T_{i\alpha} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{i\alpha} d\alpha_3,$$

где $T_{i\alpha}$, $H_{ij}^{\pm}$ – удельные усилия и обобщенные моменты; $p_{\alpha}^{\pm}$ – поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях $S^{\pm}$.

Соотношения упругости для удельных усилий и моментов с учетом соотношений (2) представим в форме

$$H_{ij}^{-} = \frac{1}{6}h\sum_{l \le m} b_{ijlm}(2e_{lm}^{-} + e_{lm}^{+}),$$

$$H_{ij}^{+} = \frac{1}{6}h\sum_{l \le m} b_{ijlm}(e_{lm}^{-} + 2e_{lm}^{+}), \quad (6)$$

$$T_{ij} = H_{ij}^{-} + H_{ij}^{+}, \quad T_{i3} = h\sum_{l} k_{il} b_{i3l3} e_{l3},$$

где для коэффициентов сдвига принято $k_{il} = 1$. Заметим, что формула (6) для поперечных усилий T_{i3} выражает достаточно простой факт: соотношения упругости для поперечных касательных напряжений (2) в теории оболочек типа Тимошенко не удовлетворяются поточечно, но выполняются интегрально по толщине оболочки [4, 5].

Проинтегрируем далее уравнения пространственной теории упругости (1) по перечной координате от δ^- до α_3 и, принимая во внимание граничные условия $\sigma_{\alpha 3}(\delta^-) = p_{\alpha}^{-}$, приходим к формулам для определения поперечных компонент напряжений

$$\sigma_{i3} = p_i^{-} - \frac{1}{A_i}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial\alpha_j} -$$

$$- B_i(Q_{ii} - Q_{jj}) - 2B_j Q_{ij} - k_i Q_{i3}, \quad i \neq j, \quad (7)$$

$$\sigma_{33} = p_3^{-} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial Q_{13}}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial Q_{23}}{\partial\alpha_2} -$$

$$- B_1 Q_{13} - B_2 Q_{23} + k_1 Q_{11} + k_2 Q_{22},$$

$$Q_{i\alpha} = \int_{\delta^-}^{\alpha_3} \sigma_{i\alpha} d\alpha_3. \quad (8)$$

Обратим внимание, что вследствие равенства $Q_{i\alpha}(\delta^+) = T_{i\alpha}$ и уравнений равновесия оболочки (5) из соотношений (7) непосредственно вытекают граничные условия $\sigma_{\alpha 3}(\delta^+) = p_{\alpha}^{+}$.

2. Обсудим важное для теории оболочек типа Тимошенко положение, связанное с удовлетворением уравнений равновесия оболочки (5) для найденного в результате решения задачи поля напряжений (2), (7). Дело в том, что, определив поперечные касательные напряжения σ_{i3} по формуле (7) и вычислив на их основе поперечные усилия T_{i3}^{s}, мы можем столкнуться с ситуацией, когда упомянутые уравнения равновесия оболочки (5) уже не удовлетворяются точно. Причина состоит в том, что поперечные усилия T_{i3}, вычисленные на основе закона Гука (2), т.е. по формуле (6), в общем случае могут не совпадать с T_{i3}^{s}.

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулами, следующими из соотношений (2), (4), (8):

$$\int_{\delta^-}^{\delta^+} Q_{ij} d\alpha_3 = hH_{ij}^{-}, \quad \int_{\delta^-}^{\delta^+} Q_{i3} d\alpha_3 = \frac{1}{2}hT_{i3}.$$

С учетом этих формул, а также (7) получим

$$T_{i3}^{s} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{i3} d\alpha_3 = h\left[p_i^{-} - \frac{1}{A_i}\frac{\partial H_{ii}^{-}}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ij}^{-}}{\partial\alpha_j} -\right.$$

$$\left. - B_i(H_{ii}^{-} - H_{jj}^{-}) - 2B_j H_{ij}^{-} - \frac{1}{2}k_i T_{i3}\right], \quad i \neq j. \quad (9)$$

Принимая во внимание уравнения равновесия оболочки (5), из (9) имеем $T^s_{i3} = T_{i3}$, что и требовалось доказать.

В заключение подчеркнем, что внутренне непротиворечивую теорию оболочек типа Тимошенко (в смысле одновременного удовлетворения уравнений равновесия оболочки (5) и соотношений (7)) удалось построить на основе физически ясного предположения об интегральном удовлетворении уравнений закона Гука для поперечных касательных напряжений (2). Это означает, что в формуле (6) для поперечных усилий следует принять $k_{il} = 1$. В связи с этим отметим, что попытки построения теории оболочек типа Тимошенко на основе тех или иных представлений о путях вычисления коэффициентов сдвига [1] будут приводить к математически непоследовательной и противоречивой теории с точки зрения разработанного здесь подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек: Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. *Reissner E.* // J. Math. Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
3. *Mindlin R.D.* // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
4. *Kulikov G.M.* // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. № 2. P. 119–125.
5. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.