ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2002, том 382, № 5, с. 629–631

МЕХАНИКА

УДК 539.3

О КОЭФФИЦИЕНТЕ СДВИГА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

© 2002 г. Член-корреспондент РАН Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов

Поступило 15.10.2001 г.

На необходимость учета поперечных сдвигов в задачах изгиба балок впервые указал С.П. Тимошенко [1]. Развитие теории Тимошенко на изотропные пластины с использованием принципа виртуальных перемещений дано в [2]. В этой теории, как известно, для учета неравномерности распределения поперечных сдвигов в сечениях оболочки вводится коэффициент сдвига k. В настоящее время для коэффициента сдвига в основном используются такие значения $k = \frac{5}{6}$ и $k = \frac{\pi^2}{12}$ [3]. В работе [4] показано, что в случае использования в линейной теории оболочек типа Тимошенко на основе подхода [2] процедуры восстановления поперечных компонент тензора напряжений путем интегрирования уравнений пространственной теории упругости более предпочтительным является установление коэффициента сдвига $k = 1$. Именно такой выбор позволил построить математически последовательную и непротиворечивую геометрически линейную теорию оболочек типа Тимошенко. В настоящей работе результаты [4] обобщаются на случай анизотропных оболочек конечного прогиба.

1. Рассмотрим тонкую анизотропную оболочку постоянной толщины h. Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная лицевым поверхностям S^- и S^+. В качестве исходной поверхности S примем какую-либо внутреннюю поверхность оболочки, отстоящую от лицевых поверхностей на расстояниях δ^- и δ^+, т.е. $h = \delta^+ - \delta^-$. Отнесем исходную поверхность к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2, отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Координату α_3 отсчитываем в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S (рис. 1).

Уравнения равновесия нелинейной теории упругости для тонкой оболочки конечного прогиба, у которой метрики лицевых поверхностей можно отождествить с метрикой исходной поверхности, имеют вид [5]

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_i}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\alpha_j} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial\alpha_3} + B_i(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \\
+ 2B_j\sigma_{ij} + k_j\Sigma_{i3} = 0 \quad (i \neq j), \\
\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Sigma_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\Sigma_{23}}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3} + B_1\Sigma_{13} + \\
+ B_2\Sigma_{23} - k_1\sigma_{11} - k_2\sigma_{22} = 0, \\
\Sigma_{i3} = \sigma_{i3} + \Theta_1\sigma_{1i} + \Theta_2\sigma_{i2}, \\
\Theta_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_i} - k_i u_i, \quad B_i = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i},
\end{gathered} \tag{1}$$

где u_α – перемещения точек оболочки; $\sigma_{\alpha\beta}$ – напряжения; A_i и k_i – параметры Ламé и кривизны координатных линий. Здесь и далее $i, j = 1, 2$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Соотношения обобщенного закона Гука запишем в форме [4]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \sum_{l \le m} b_{ijlm}\varepsilon_{lm}, \quad \sigma_{i3} = \sum_{l} b_{i3l3}\varepsilon_{l3}, \\
i, j, l, m = 1, 2.
\end{gathered} \tag{2}$$

При построении теории воспользуемся модифицированной гипотезой Тимошенко [4, 6] о линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине оболочки:

$$\begin{gathered}
u_i = N^-(\alpha_3)v_i^- + N^+(\alpha_3)v_i^+, \quad u_3 = v_3, \\
N^-(\alpha_3) = \frac{\delta^+ - \alpha_3}{h}, \quad N^+(\alpha_3) = \frac{\alpha_3 - \delta^-}{h},
\end{gathered} \tag{3}$$

где $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ – тангенциальные перемещения лицевых поверхностей $S^\pm$; $v_3(\alpha_1, \alpha_2)$ – поперечное перемещение поверхности S.

Введем перемещения (3) в деформационные соотношения нелинейной теории упругости [5] для тонкой оболочки конечного прогиба и, полагая, что поперечные сдвиги распределены равно-

Московский государственный технический университет (МАМИ)
Тамбовский государственный технический университет

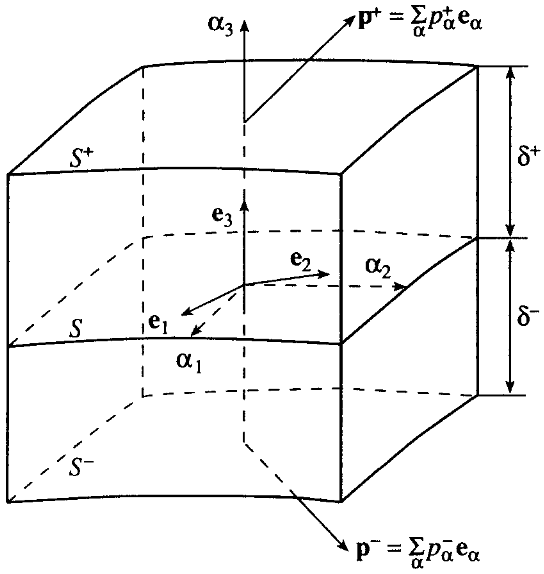

Рис. 1. Элемент оболочки.

мерно по толщине оболочки, а тангенциальные деформации – линейно [7], получим

$$\varepsilon_{ij} = N^-(\alpha_3)E_{ij}^- + N^+(\alpha_3)E_{ij}^+, \quad \varepsilon_{i3} = E_{i3}, \quad \varepsilon_{33} = 0,$$

$$E_{ii}^{\pm} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^{\pm}}{\partial \alpha_i} + B_j v_j^{\pm} + k_i v_3 + \frac{1}{2}(\theta_i^{\pm})^2 \quad (i \neq j),$$

$$E_{12}^{\pm} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_2^{\pm}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1^{\pm}}{\partial \alpha_2} - B_2 v_1^{\pm} - B_1 v_2^{\pm} + \theta_1^{\pm}\theta_2^{\pm}, \tag{4}$$

$$E_{i3} = \beta_i - \theta_i,$$

$$\beta_i = \frac{1}{h}(v_i^+ - v_i^-), \quad \theta_i^{\pm} = k_i v_i^{\pm} - \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i},$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\theta_i^- + \theta_i^+).$$

Умножим первые два уравнения равновесия (1) на функции формы $N^{\pm}(\alpha_3)$ и проинтегрируем их вместе с третьим уравнением по поперечной координате от δ^- до δ^+ с учетом граничных условий на лицевых поверхностях $S^{\pm}$:

$$\sigma_{\alpha 3}(\delta^{\pm}) = p_\alpha^{\pm}, \tag{5}$$

что согласуется с принципом виртуальной работы. При этом $p_\alpha^{\pm}$ – компоненты векторов поверхностных нагрузок $\mathbf{p}^{\pm}$ (рис. 1), действующих на лицевых поверхностях $S^{\pm}$. В результате, принимая во внимание соотношения (3), (4), приходим к нелинейным уравнениям равновесия оболочки относительно удельных усилий и моментов

$$\begin{gathered}\frac{1}{A_i}\frac{\partial H_{ii}^{\pm}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ij}^{\pm}}{\partial \alpha_j} + B_i(H_{ii}^{\pm} - H_{jj}^{\pm}) + 2B_j H_{ij}^{\pm} + \\ + k_i S_{i3}^{\pm} \mp \frac{1}{h}T_{i3} = \mp p_i^{\pm} \quad (i \neq j), \\ \frac{1}{A_1}\frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2} + B_1 N_{13} + B_2 N_{23} - \\ - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = p_3^- - p_3^+,\end{gathered} \tag{6}$$

где $T_{i\alpha}$, $H_{ij}^{\pm}$, H_{ij}^{pq}, N_{i3}, $S_{i3}^{\pm}$ – удельные усилия и обобщенные моменты, определяемые по формулам

$$\begin{gathered}N_{i3} = T_{i3} - \theta_1^- H_{1i}^- - \theta_1^+ H_{1i}^+ - \theta_2^- H_{i2}^- - \theta_2^+ H_{i2}^+, \\ S_{i3}^- = \frac{1}{2}T_{i3} - \theta_1^- H_{1i}^{00} - \theta_1^+ H_{1i}^{01} - \theta_2^- H_{i2}^{00} - \theta_2^+ H_{i2}^{01}, \\ S_{i3}^+ = \frac{1}{2}T_{i3} - \theta_1^- H_{1i}^{01} - \theta_1^+ H_{1i}^{11} - \theta_2^- H_{i2}^{01} - \theta_2^+ H_{i2}^{11}, \\ T_{i\alpha} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{i\alpha} d\alpha_3, \quad H_{ij}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{ij} N^{\pm}(\alpha_3) d\alpha_3, \\ H_{ij}^{pq} = \int_{\delta^-}^{\delta^+} \sigma_{ij}[N^-(\alpha_3)]^{2-p-q}[N^+(\alpha_3)]^{p+q} d\alpha_3, \\ p, q = 0, 1.\end{gathered} \tag{7}$$

Соотношения упругости для удельных усилий и обобщенных моментов (7) с учетом соотношений (2), (4) представим в форме

$$\begin{gathered}H_{ij}^{00} = \frac{1}{12}h\sum_{l \le m} b_{ijlm}(3E_{lm}^- + E_{lm}^+), \\ H_{ij}^{01} = \frac{1}{12}h\sum_{l \le m} b_{ijlm}(E_{lm}^- + E_{lm}^+), \\ H_{ij}^{11} = \frac{1}{12}h\sum_{l \le m} b_{ijlm}(E_{lm}^- + 3E_{lm}^+), \\ H_{ij}^- = H_{ij}^{00} + H_{ij}^{01}, \quad H_{ij}^+ = H_{ij}^{01} + H_{ij}^{11}, \\ T_{ij} = H_{ij}^- + H_{ij}^+, \quad T_{i3} = h\sum_l k_{il} b_{i3l3} E_{i3},\end{gathered} \tag{8}$$

где для коэффициентов сдвига принято $k_{il} = 1$. Заметим, что формула (8) для поперечных усилий T_{i3} выражает достаточно простой факт: соотношения упругости для поперечных касательных напряжений (2) в теории оболочек типа Тимошенко не удовлетворяются поточечно, но выполняются интегрально по толщине оболочки [6–8].

Проинтегрируем далее уравнения теории упругости (1) по поперечной координате от δ^- до α_3 и, принимая во внимание граничные условия (5) на лицевой поверхности S^-, приходим к формулам для определения поперечных компонент тензора напряжений

$$\sigma_{i3} = p_i^- - \frac{1}{A_i}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \alpha_j} - B_i(Q_{ii} - Q_{jj}) - - 2B_jQ_{ij} - k_iR_{i3} \quad (i \neq j),$$
$$\sigma_{33} = p_3^- - \frac{1}{A_1}\frac{\partial R_{13}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial R_{23}}{\partial \alpha_2} - B_1R_{13} - - B_2R_{23} + k_1Q_{11} + k_2Q_{22}, \tag{9}$$

где обозначено:

$$R_{i3} = Q_{i3} - \theta_1^-M_{1i}^- - \theta_1^+M_{1i}^+ - \theta_2^-M_{i2}^- - \theta_2^+M_{i2}^+,$$
$$Q_{i\alpha} = \int_{\delta^-}^{\alpha_3}\sigma_{i\alpha}d\alpha_3, \quad M_{ij}^{\pm} = \int_{\delta^-}^{\alpha_3}\sigma_{ij}N^{\pm}(\alpha_3)d\alpha_3. \tag{10}$$

Обратим внимание, что вследствие равенств $Q_{i\alpha}(\delta^+) = T_{i\alpha}$, $M_{ij}^{\pm}(\delta^+) = H_{ij}^{\pm}$ и уравнений равновесия оболочки (6) из соотношений (9) непосредственно вытекают граничные условия (5) на лицевой поверхности S^+.

2. Обсудим важное для теории оболочек типа Тимошенко положение, связанное с удовлетворением уравнений равновесия оболочки (6) для найденного в результате решения задачи поля напряжений (2), (9). Определив уточненные поперечные касательные напряжения σ_{i3} по формуле (9) и вычислив на их основе поперечные усилия T_{i3}^s, мы можем столкнуться с ситуацией, когда упомянутые уравнения равновесия оболочки (6) уже не удовлетворяются точно. Причина состоит в том, что поперечные усилия T_{i3}, вычисленные на основе закона Гука (2), т.е. по формуле (8), в общем случае могут не совпадать с T_{i3}^s.

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулами, следующими из соотношений (2), (4), (8), (10):

$$\int_{\delta^-}^{\delta^+}Q_{ij}d\alpha_3 = hH_{ij}^-, \quad \int_{\delta^-}^{\delta^+}Q_{i3}d\alpha_3 = \frac{1}{2}hT_{i3},$$
$$\int_{\delta^-}^{\delta^+}M_{ij}^-d\alpha_3 = hH_{ij}^{00}, \quad \int_{\delta^-}^{\delta^+}M_{ij}^+d\alpha_3 = hH_{ij}^{01}.$$

С учетом этих формул, а также (9) получим

$$T_{i3}^s = \int_{\delta^-}^{\delta^+}\sigma_{i3}d\alpha_3 = h\left[p_i^- - \frac{1}{A_i}\frac{\partial H_{ii}^-}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ij}^-}{\partial \alpha_j} - - B_i(H_{ii}^- - H_{jj}^-) - 2B_jH_{ij}^- - k_iS_{i3}^-\right] \quad (i \neq j). \tag{11}$$

Принимая во внимание уравнения равновесия оболочки (6), из (11) имеем $T_{i3}^s = T_{i3}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, внутренне непротиворечивую геометрически нелинейную теорию оболочек типа Тимошенко в смысле одновременного удовлетворения нелинейных уравнений равновесия оболочки (6) и соотношений (9) удалось построить на основе физически ясного предположения об интегральном удовлетворении уравнений закона Гука для поперечных касательных напряжений (2). Поэтому в формуле (8) для поперечных усилий и было принято $k_{il} = 1$. В заключение подчеркнем, что попытки построения геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко на основе тех или иных представлений о путях вычисления коэффициентов сдвига k_{il} будут приводить к математически непоследовательной и противоречивой теории с точки зрения разработанного здесь подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. Ч. 2. Стержни и пластинки. СПб.: типография Коллинса, 1916. 416 с.
2. *Mindlin R.D.* // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
3. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
4. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* // ДАН. 2001. Т. 381. № 1. С. 47–49.
5. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
6. *Kulikov G.M.* // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. № 2. P. 119–125.
7. *Куликов Г.М., Плотникова С.В.* // Механика композит. материалов. 1999. Т. 35. № 3. С. 347–358.
8. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.