

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ ДЛЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2011 г. Г. М. Куликов, С. В. Плотникова

Представлено академиком С.С. Григоряном 27.01.2011 г.

Поступило 28.01.2011 г.

Как известно, традиционный путь построения теории оболочек состоит в разложении перемещений в степенные ряды относительно поперечной координаты  $\theta_3$ , отсчитываемой вдоль внешней нормали к срединной поверхности оболочки. Для приближенного представления поля перемещений можно воспользоваться конечными отрезками степенных рядов, поскольку основная цель теории оболочек состоит в получении приближенных решений задач трехмерной теории упругости. Идея этого подхода восходит к работам Коши [1]. Именно таким образом строятся уточненные теории оболочек с учетом поперечных сдвигов [2–4]. Получила также развитие теория оболочек на основе разложения поля перемещений в ряды по полиномам Лежандра относительно координаты  $\theta_3$  [5]. Однако кажущееся преимущество этой теории теряется при ее применении в задачах статки толстых оболочек, в которых для получения приемлемых результатов необходимо удерживать достаточно большое число членов в соответствующих разложениях. Альтернативный подход связан с рассмотрением в теле оболочки отсчитанных поверхностей  $\Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^N$ , параллельных срединной поверхности с целью использования векторов перемещений этих поверхностей  $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^N$  в качестве искомым функций. Развитие этого подхода для случая трех равноудаленных отсчитанных поверхностей дано в [6, 7]. Здесь изучен общий случай с произвольным расположением отсчитанных поверхностей в оболочке.

1. Рассмотрим оболочку постоянной толщины  $h$ . Отнесем срединную поверхность  $\Omega$  к криволинейным ортогональным координатам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Базисные векторы отсчитанных поверхностей  $\Omega^I$  представим в виде

$$\mathbf{g}_\alpha^I = \mathbf{R}_{,\alpha}^I = A_\alpha c_\alpha^I \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3^I = \mathbf{e}_3, \quad c_\alpha^I = 1 + k_\alpha \theta_3^I, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}^I$  – радиусы-векторы поверхностей  $\Omega^I$  (рис. 1);  $\mathbf{e}_\alpha$  – единичные векторы касательных к координатным линиям  $\theta_\alpha$ ;  $\mathbf{e}_3$  – единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности;  $A_\alpha$  – параметры Ламе;  $k_\alpha$  – главные кривизны;  $\theta_3^I$  – поперечные координаты поверхностей  $\Omega^I$ , при этом  $\theta_3^1 = -\frac{h}{2}$  и  $\theta_3^N = \frac{h}{2}$ . Здесь и далее индексы  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, i, j, k, m = 1, 2, 3, I, J, K = 1, 2, \dots, N$ .

Базисные векторы отсчитанных поверхностей оболочки в деформированном состоянии находим по формулам

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha^I = \bar{\mathbf{R}}_{,\alpha}^I = \mathbf{g}_\alpha^I + \mathbf{u}_{,\alpha}^I, \quad \bar{\mathbf{g}}_3^I = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}^I, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^I = \mathbf{u}(\theta_3^I), \quad \boldsymbol{\beta}^I = \mathbf{u}_{,3}(\theta_3^I), \quad (3)$$

где  $\bar{\mathbf{R}}^I$  – радиусы-векторы поверхностей  $\Omega^I$  в деформированном состоянии (рис. 1);  $\mathbf{u}^I(\theta_1, \theta_2)$  – векторы перемещений поверхностей  $\Omega^I$ ;  $\boldsymbol{\beta}^I(\theta_1, \theta_2)$  – значения производной вектора перемещений по координате  $\theta_3$  на поверхностях  $\Omega^I$ .

Компоненты тензора деформаций на отсчитанных поверхностях оболочки имеют вид

$$2\varepsilon_{ij}^I = 2\varepsilon_{ij}(\theta_3^I) = \frac{1}{A_i A_j c_i^I c_j^I} (\bar{\mathbf{g}}_i^I \cdot \bar{\mathbf{g}}_j^I - \mathbf{g}_i^I \cdot \mathbf{g}_j^I), \quad (4)$$

где  $A_3 = 1$  и  $c_3^I = 1$ . Вводя базисные векторы (1), (2) в деформационные соотношения пространственной теории упругости (4) и пренебрегая нелинейными членами, получим

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{A_\alpha c_\alpha^I} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{A_\beta c_\beta^I} \mathbf{u}_{,\beta}^I \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad (5)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha c_\alpha^I} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_3, \quad \varepsilon_{33}^I = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_3.$$

Представим векторы  $\mathbf{u}^I$  и  $\boldsymbol{\beta}^I$  в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_i$ :

$$\mathbf{u}^I = \sum_i u_i^I \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\beta}^I = \sum_i \beta_i^I \mathbf{e}_i. \quad (6)$$

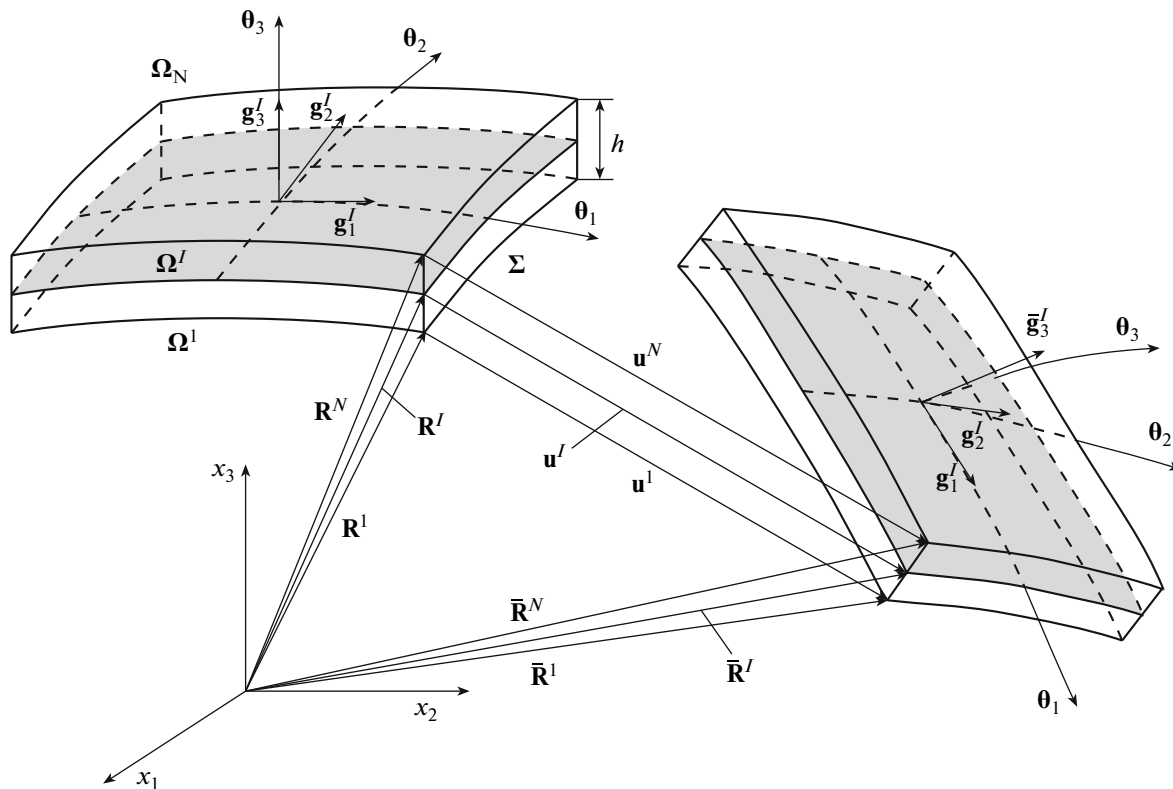


Рис. 1. Начальная и деформированная конфигурации оболочки.

Из первого разложения (6) с учетом известных формул дифференцирования базисных векторов  $e_i$  по координатам  $\theta_\alpha$  [1] следует

$$\frac{1}{A_\alpha} \mathbf{u}_{,\alpha}^I = \sum_i \lambda_{i\alpha}^I \mathbf{e}_i, \quad (7)$$

где

$$\lambda_{\alpha\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{,\alpha}^I + B_\alpha u_\beta^I + k_\alpha u_3^I, \quad \lambda_{\beta\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{,\beta\alpha}^I - B_\alpha u_\alpha^I, \quad (8)$$

$$\lambda_{3\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{,\alpha}^I - k_\alpha u_\alpha^I, \quad B_\alpha = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha\beta} \quad (\beta \neq \alpha).$$

Подставляя (6), (7) в соотношения (5), приходим к скалярной форме деформационных соотношений

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{c_\beta} \lambda_{\alpha\beta}^I + \frac{1}{c_\alpha} \lambda_{\beta\alpha}^I, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \beta_\alpha^I + \frac{1}{c_\alpha} \lambda_{3\alpha}^I, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33}^I = \beta_3^I.$$

2. Заметим, что до этого момента не было сделано никаких предположений о характере распределения полей перемещений и деформаций в оболочке. Пусть перемещения распределены в поперечном направлении оболочки согласно следующему закону:

$$\mathbf{u} = \sum_I L^I \mathbf{u}^I, \quad (10)$$

где  $L^I(\theta_3)$  – полиномы Лагранжа степени  $N - 1$ , определяемые по известной формуле

$$L^I = \prod_{J \neq I} \frac{\theta_3 - \theta_3^J}{\theta_3^I - \theta_3^J}, \quad (11)$$

при этом  $L^I(\theta_3^J) = 1$  при  $J = I$  и  $L^I(\theta_3^J) = 0$  при  $J \neq I$ .

Из соотношений (3), (6), (10) имеем

$$\beta_i^I = \sum_J M^J(\theta_3^I) u_i^J, \quad (12)$$

где  $M^J = L_{,3}^J$  – полиномы степени  $N - 2$ ; их значения на отсчетных поверхностях  $\Omega^I$  согласно (11) находим по формулам

$$M^J(\theta_3^I) = \frac{1}{\theta_3^J - \theta_3^I} \prod_{K \neq I, J} \frac{\theta_3^I - \theta_3^K}{\theta_3^J - \theta_3^K} \quad (J \neq I), \quad (13)$$

$$M^I(\theta_3^I) = -\sum_{J \neq I} M^J(\theta_3^I).$$

Таким образом, определяющие функции предлагаемой теории оболочек  $\beta_i^I$  представлены в виде линейной комбинации перемещений отсчетных поверхностей  $u_i^I$ .

Следующий шаг состоит в выборе закона распределения деформаций по толщине оболочки. Очевидно, что распределение деформаций в по-

**Таблица 1.** Результаты расчета для толстой оболочки ( $R/h = 2$ )

$N$	$U_3(0)$	$S_{22}(0.5)$	$-S_{22}(-0.5)$	$S_{23}(0)$
3	0.889	1.125	0.701	0.448
5	0.977	1.839	2.056	0.577
7	0.995	1.903	2.399	0.547
9	0.998	1.913	2.455	0.555
Решение [9]	0.999	1.907	2.455	0.555

перечном направлении должно быть согласовано с распределением перемещений (10), т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \sum_I L^I \varepsilon_{ij}^I \quad (14)$$

3. Подставим деформации (14) в принцип виртуальной работы и, вводя результирующие напряжений

$$H_{ij}^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} L^I c_1 c_2 d\theta_3, \quad c_\alpha = 1 + k_\alpha \theta_3, \quad (15)$$

приходим к вариационному уравнению

$$\iint_{\Omega} \left[ \sum_I \sum_{i,j} H_{ij}^I \delta \varepsilon_{ij}^I - \sum_i (c_1^N c_2^N p_i^+ \delta u_i^N - c_1^I c_2^I p_i^- \delta u_i^I) \right] \times A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 = \delta W_\Sigma, \quad (16)$$

где  $p_i^-, p_i^+$  – поверхностные нагрузки, действующие на внутренней и внешней поверхностях оболочки;  $W_\Sigma$  – работа внешних сил, действующих на боковой поверхности  $\Sigma$ .

Ограничимся рассмотрением линейно упругих материалов, для которых применимы соотношения обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,m} C_{ijkm} \varepsilon_{km}. \quad (17)$$

Введем далее напряжения (17) в (15) и, учитывая обозначение

$$D_{ijkm}^{IJ} = C_{ijkm} \int_{-h/2}^{h/2} L^I L^J c_1 c_2 d\theta_3, \quad (18)$$

получим выражение для вычисления результирующих напряжений

$$H_{ij}^I = \sum_J \sum_{k,m} D_{ijkm}^{IJ} \varepsilon_{km}^J. \quad (19)$$

З а м е ч а н и е. Определенный интеграл (18) может быть вычислен точно путем применения квадратурных формул Гаусса с порядком точности  $2N + 1$ , так как интегрируемая функция является полиномом степени  $2N$ .

4. Вариационное уравнение (16) с учетом (18), (19) является основой для построения геометрически точного билинейного конечного элемента оболочки [7, 8]. Термин “геометрически точный” означает, что срединная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями, в частности сплайнами, т.е. параметризация поверхности считается известной. При этом было использовано аналитическое интегрирование в пределах конечного элемента, что является прерогативой геометрически точного элемента оболочки [8].

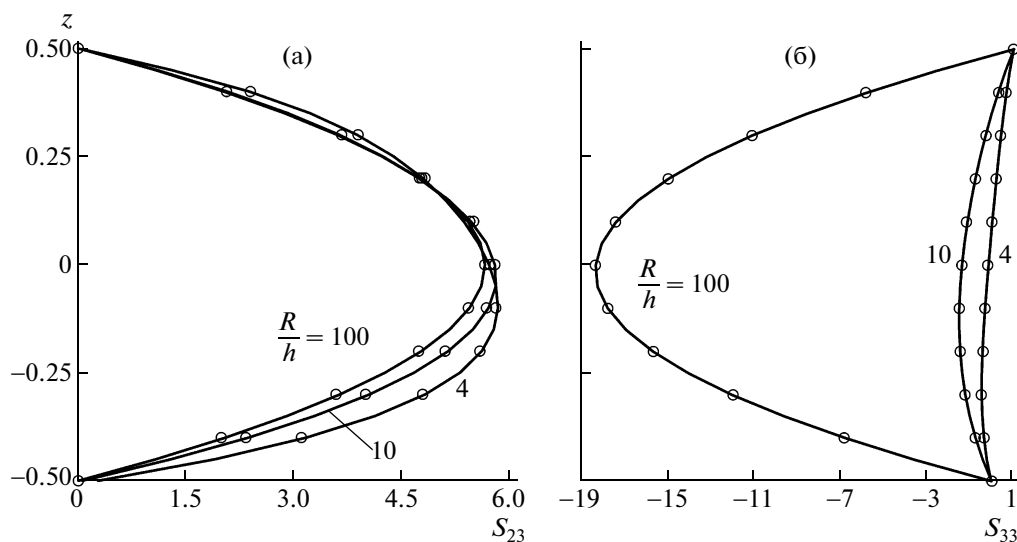
В качестве примера рассмотрим цилиндрический изгиб шарнирно опертой цилиндрической оболочки под действием поперечной нагрузки  $p_3^+ = p_0 \sin 3\theta_2$ , где  $\theta_2$  – окружная координата, изменяющаяся в пределах от 0 до  $\pi/3$ . Чтобы удовлетворить граничным условиям на торцах оболочки принято  $u_3^I = 0$ , что эквивалентно согласно (10)  $u_3 = 0$ . Цилиндрическая оболочка радиуса  $R = 10$  изготовлена из армированного в окружном направлении композита со следующими механическими параметрами [9]:  $E_L = 25E_T$ ,  $G_{LT} = 0.5E_T$ ,  $G_{TT} = 0.2E_T$ ,  $E_T = 10^6$ ,  $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$ . Индексы  $L$  и  $T$  соответствуют направлению армирования и поперечному направлению. Для сравнения с аналитическим решением плоской задачи теории упругости [9] введем безразмерные величины

$$U_3 = \frac{10E_T h^3 u_3(\pi/6, z)}{p_0 R^4}, \quad S_{22} = \frac{h^2 \sigma_{22}(\pi/6, z)}{p_0 R^2},$$

$$S_{23} = \frac{h \sigma_{23}(0, z)}{p_0 R}, \quad S_{33} = \frac{\sigma_{33}(\pi/6, z)}{p_0}, \quad z = \frac{\theta_3}{h}.$$

**Таблица 2.** Результаты расчета цилиндрической оболочки

$\frac{R}{h}$	$N = 7$				Точное решение [9]		
	$U_3(0)$	$S_{22}(0.5)$	$S_{23}(0)$	$S_{23}(-0.5)$	$U_3(0)$	$S_{22}(0.5)$	$S_{23}(0)$
4	0.312	1.079	0.571	0.028	0.312	1.079	0.572
10	0.115	0.806	0.579	0.006	0.115	0.807	0.579
50	0.077	0.752	0.568	0.001	0.077	0.752	0.568
100	0.076	0.750	0.565	0.000	0.076	0.751	0.565



**Рис. 2.** Распределение поперечных напряжений  $S_{23}$  (а) и  $S_{33}$  (б) по толщине оболочки: точное решение [9] (точки) и настоящая теория оболочек при  $N = 7$  (кривая).

Вследствие симметрии задачи рассмотрена половина оболочки, которая моделировалась с помощью 64 конечных элементов, характеризующих плоское деформированное состояние оболочки. Данные табл. 1, 2 показывают, что при надлежащем выборе равноудаленных отсчетных поверхностей можно добиться хорошего согласования с аналитическим решением даже для случая толстой оболочки. Распределение поперечных напряжений по толщине оболочки при выборе семи равноудаленных отсчетных поверхностей также свидетельствует о высоком потенциале предложенной теории, так как граничные условия на лицевых поверхностях оболочки удовлетворяются с достаточной для практики точностью (см. рис. 2 и табл. 2).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08–01–00373) и Министерством образования и науки РФ (проекты 2.1.1/660, 2.1.1/10003).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
2. *Палий О.М., Спино В.Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977. 392 с.
3. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
4. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб: Изд-во СПб ГУ, 1996. 278 с.
5. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
6. *Kulikov G.M.* // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. № 2. P. 119–125.
7. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* // Comput. Model. Eng. Sci. 2008. V. 28. № 1. P. 15–38.
8. *Kulikov G.M., Plotnikova S.V.* // Comput. Struct. 2006. V. 84. № 19/20. P. 1275–1287.
9. *Ren J.G.* // Compos. Sci. Tech. 1987. V. 29. P. 169–187.