МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ. — 1988. — № 2. — С. 287...298

УДК 624.074.001:678.067

Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов

РАЗВИТИЕ ОБЩЕГО НАПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Со времени разработки ставшей впоследствии общепринятой классификации основных направлений в теории многослойных оболочек [1] прошло более 15 лет. В обзоре [2] дан анализ исследований, проведенных в основном в 1978...1981 гг., но рассматриваются в нем главным образом прикладные методы расчета пластин и оболочек из композитов и вопросы проектирования конструкций. Поэтому давно назрела необходимость собрать и проанализировать с единых позиций работы, представляющие наиболее общее направление в теории многослойных оболочек [1] и в большинстве своем опубликованные после 1972 г.

Рассмотрим работы, в которых для описания механического поведения каждого слоя оболочки применяются различного рода неклассические гипотезы. Простейшей из них, как известно, является кинематическая гипотеза Тимошенко (гипотеза прямой линии). При таком подходе порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений зависит от числа слоев, что позволяет исследовать тонкие эффекты, связанные с локальным характером деформирования отдельных слоев оболочки. Между тем близкое направление в механике неоднородных конструкций — теория оболочек, выполненных из чередующихся жестких и мягких слоев [3], — выпадает из обзора, так как в ней для жестких слоев принимаются справедливыми классические гипотезы Кирхгофа—Лява.

Авторы не ставили перед собой цель обсудить все известные им работы по общему направлению в теории многослойных оболочек. Своей задачей они считали возможно более полный анализ основных подходов к построению теории многослойных оболочек и установление взаимосвязи между ними.

1. Принципы построения теории многослойных оболочек заложены в фундаментальных трудах по трехслойным оболочкам [4, 5], где впервые была сформулирована гипотеза ломаной линии, позволившая методологически строить теорию трехслойных оболочек в духе однослойных.

Теория многослойных пологих оболочек, в которой при выводе уравнений равновесия для каждого слоя принимается кинематическая гипотеза Тимошенко (гипотеза ломаной линии для оболочки), разработана в [6...9]. В теории многослойных оболочек Григолюка—Чулкова теряют смысл такие общепринятые в механике твердого деформируемого тела понятия, как несущий (жесткий) слой, заполнитель (мягкий слой). С точки зрения этой теории все слои оболочки равноценны, что дает возможность максимально алгоритмизировать задачу [10...12].

Вернемся к анализируемой теории [6, 7]. В соответствии с гипотезой ломаной линии тангенциальные перемещения определяются по формуле

$$u_i^{(k)} = u_i + \sum_{n=1}^{k-1} h_n \beta_i^{(n)} + (z - \delta_{k-1}) \beta_i^{(k)}. \tag{1.1}$$

Здесь и всюду в дальнейшем u_i — тангенциальные перемещения внутренней поверхности оболочки; h_k — толщина k-го слоя; h — толщина оболочки; δ_k — расстояние от поверхности приведения до верхней граничной поверхности k-го слоя ($\delta_0=0$); $\beta_i^{(k)}$ — углы поворота нормали в k-м слое; z — поперечная координата; N — число слоев; $k=1,2,\ldots,N$; $i=1$, 2. Поперечное обжатие слоев по толщине не учитывается, поэтому нормальное перемещение (прогиб) w не зависит от поперечной координаты z. Далее из принципа возможных перемещений получены $2N+3$ нелинейных уравнений равновесия относительно неизвестных функций u_i, w, $\beta_i^{(k)}$. Общий порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений равен $4N+6$. Уравнения нелинейных поперечных колебаний пологих оболочек позднее выведены в [13].

Математические вопросы построенной теории детально изучены в работах [14, 15], где был доказан ряд теорем о свойствах корней разрешающего характеристического уравнения. Частным вопросам теории многослойных пластин посвящены работы [16, 17]. Цилиндрические оболочки и балки из слоистых композитов исследованы в [18...20].

Обобщение теории Григолюка—Чулкова на непологие многослойные анизотропные оболочки впервые дано в [11]. Из общих соотношений для трехмерного континуума получены геометрически нелинейные уравнения равновесия многослойных оболочек, записанные в произвольных криволинейных координатах. При этом учитывалось изменение метрики по толщине оболочки. Вариант нелинейной теории многослойных анизотропных оболочек построен в [21].

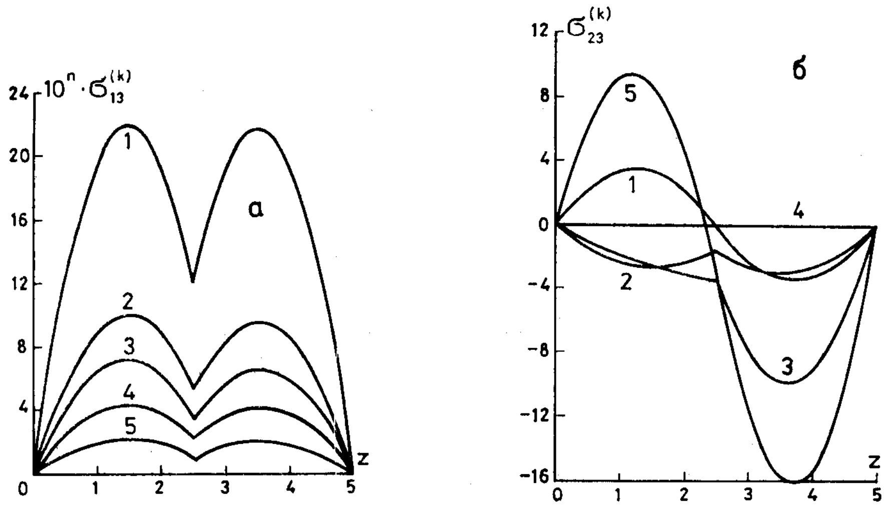
Рассмотренные выше подходы обладают, к сожалению, одним недостатком. Поперечные сдвиги и вследствие использования закона Гука поперечные касательные напряжения распределены равномерно по толщине k-го слоя. В работах [22, 23] с помощью независимых кинематических (1.1) и статических гипотез

$$\sigma_{i3}^{(k)}=f_0(z)\mu_i^{(0)}+f_k(z)\mu_i^{(k)}+p_i^-+z(p_i^+-p_i^-)/h \qquad (1.2)$$

построен непротиворечивый с точки зрения смешанного вариационного принципа геометрически нелинейный вариант теории непологих многослойных анизотропных оболочек, в котором поперечные касательные напряжения являются непрерывными функциями поперечной координаты всюду в оболочке, в том числе и на поверхностях раздела слоев, а на граничных поверхностях они принимают заданные значения. В (1.2) $f_0(z)$, $f_k(z)$ — априори заданные функции, непрерывные и удовлетворяющие условиям $f_0(0)=f_0(h)=0$, $f_k(z)\equiv 0$, $z\in[0,\delta_{k-1}]\cup[\delta_k,h]$; $p_i^-=\sigma_{i3}^{(1)}(0)$, $p_i^+=\sigma_{i3}^{(N)}(h)$ — касательные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях оболочки. При построении теории не накладывается никаких особых ограничений на вид функций $f_0(z)$, $f_k(z)$ и лишь при решении конкретных задач считается, что они суть квадратные параболы.

В [22, 23] получено $2N+3$ уравнений равновесия в удельных усилиях и моментах, соответствующие им граничные условия, а также $N+1$ интегральных соотношений упругости, выражающих связь между поперечными сдвигами и поперечными касательными напряжениями. Интегральные соотношения упругости имеют важное значение в рассматриваемом варианте теории многослойных оболочек, так как именно с их помощью удается выразить «лишние» функции $\mu_i^{(0)}$, $\mu_i^{(k)}$ из (1.2) через кинематические характеристики оболочки u_i, w, $\beta_i^{(k)}$.

Эффективность независимых кинематических и статических гипотез (1.1), (1.2) продемонстрируем на простом примере. Пусть двухслойная перекрестно армированная цилиндрическая оболочка с защемленными торцами растягивается в осевом направлении. Характеристики оболочки, слои которой выполнены из бороэпоксидного композита, даны в статье [24]. На рисунке показано распределение поперечных касательных напряжений $\sigma_{i3}^{(k)}$ по толщине пакета ($h=5$ мм) в сечении оболочки на расстоянии 10 мм от торца ($L=100$ мм) в зависимости от угла армирования $\gamma=0°$, 15°, 45°, 60°, 75° (см. кривые *4*, *1*, *5*, *3*, *2*; $n=0$, 0, -1, 0, 0). Как видим, напряжения $\sigma_{13}^{(k)}$ распределены по толщине пакета по



закону, близкому к параболическому. Что касается напряжений $\sigma_{23}^{(k)}$, то они вообще имеют непараболический характер распределения, который постулируется в подавляющем большинстве известных авторам уточненных теорий многослойных оболочек. При этом порядок величин $\sigma_{13}^{(k)}$, $\sigma_{23}^{(k)}$ одинаков, что указывает на существенное влияние эффекта анизотропии на напряженно-деформированное состояние конструкции. Были также проанализированы кромочные эффекты в перекрестно армированных цилиндрических оболочках. Оказалось, что вблизи свободного края резко меняется сам характер изменения эпюр поперечных касательных напряжений. Так, напряжения $\sigma_{13}^{(k)}$ распределены по синусоидальному закону, а $\sigma_{23}^{(k)}$ — по закону, близкому к параболическому.

Более общий вариант нелинейной теории многослойных оболочек на основе зависимых кинематических и статических гипотез [см. (1.2)] разработан в [25].

Тангенциальные перемещения распределены по толщине k-го слоя согласно нелинейному закону, поскольку они определяются из формул для поперечных сдвигов k-го слоя:

$$\varepsilon_{i3}^{(k)} = (G_{i3}^{(k)})^{-1}[f_0(z)\mu_i^{(0)} + f_k(z)\mu_i^{(k)} + p_i^- + z(p_i^+ - p_i^-)/h],$$

интегрированием их по поперечной координате z с учетом условий непрерывности для тангенциальных перемещений:

$$u_i^{(n)}(\delta_n) = u_i^{(n+1)}(\delta_n) \quad (n=1, 2, \ldots, N-1). \tag{1.3}$$

Здесь $G_{i3}^{(k)}$ — модули поперечного сдвига k-го слоя. При таком подходе общий порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений, полученной из принципа возможных перемещений, повышается на два и становится равным $4N+8$. Для однослойной оболочки ($N=1$) порядок равен 12.

Как известно, в последние годы ситуация на рынке вычислительной техники сложилась так, что проблема хранения в памяти ЭВМ больших массивов уже не является решающей, поэтому гипотеза ломаной линии получает все большее признание среди ученых. В [26] гипотеза ломаной линии (1.1) была использована для расчета слоистых стержней несимметричного строения. Нейтральная линия стержня выбрана в качестве исходной, что несколько упрощает последующий анализ. Разрешающая система $N+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2(N+1)$ относительно углов поворота нормали $\beta_1^{(k)}$ и прогиба w решается методом конечных разностей. В [27, 28] разработан алгоритм численного решения задач прочности многослойных ортотропных оболочечных конструкций в геометрически нелинейной постановке. В случае осесимметричной деформации замкнутой оболочки вращения решается записанная в нормальной форме система $2(N+2)$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Более общий алгоритм разработан в [23, 29], где для определения напряженно-деформированного состояния осесимметрично нагруженной и закрепленной оболочки вращения, выполненной из анизотропных (неортотропных) материалов, использована нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений $4N+6$-го порядка. Вектор решений имеет вид

$$\mathbf{Y}=[T_{11}, N_1, \Phi_{11}{}^{(1)}, \ldots, \Phi_{11}{}^{(N)}, T_{12}, \Phi_{12}{}^{(1)}, \ldots, \Phi_{12}{}^{(N)}, \\ u_1, w, \beta_1{}^{(1)}, \ldots, \beta_1{}^{(N)}, u_2, \beta_2{}^{(1)}, \ldots, \beta_2{}^{(N)}]^T,$$

где T_{ij}, Q_i — удельные тангенциальные и поперечные усилия; N_i — обобщенные в смысле Феппля—Кармана поперечные усилия; $\Phi_{ij}{}^{(k)}$ — обобщенные удельные моменты k-го слоя; i, $j=1$, 2. В [29] решена практически важная задача о напряженном состоянии нагруженной эксплуатационным давлением современной пневматической шины. Геометрические параметры исходной (внутренней) поверхности шины определяли с помощью сглаживающей сплайн-аппроксимации, впервые предложенной в [30]. Под последними понимаем оболочки, у которых меридиан задан на плоскости дискретным набором точек, в значениях координат которых содержатся случайные ошибки измерений.

Широкое использование ЭВМ в инженерных расчетах привело к тому, что некоторые исследователи предпочитают использовать гипотезу ломаной линии в форме, отличной от (1.1). Суть гипотезы от этих модификаций, естественно, не меняется, однако несколько упрощается численная реализация задачи на ЭВМ. В [31, 32] в качестве неизвестных функций предложено брать тангенциальные перемещения внешних поверхностей оболочки $v_i{}^{(0)}=u_i$, $v_i{}^{(N)}$ и поверхностей раздела слоев $v_i{}^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots, N-1)$, а также прогиб w, который в [31] не зависит от поперечной координаты z. Относительно новых функций гипотезу ломаной линии можно записать как

$$u_i{}^{(k)}=u_{i0}{}^{(k)}+z_k u_{i1}{}^{(k)} \qquad (-h_k/2\leqslant z_k\leqslant h_k/2); \tag{1.4}$$

$$u_{i0}{}^{(k)}=\frac{v_i{}^{(k)}+v_i{}^{(k-1)}}{2}; \quad u_{i1}{}^{(k)}=\frac{v_i{}^{(k)}-v_i{}^{(k-1)}}{h_k}, \tag{1.5}$$

где $u_{i0}{}^{(k)}$, $u_{i1}{}^{(k)}$ — тангенциальные перемещения и углы поворота нормали к срединной поверхности k-го слоя; z_k — локальная поперечная координата, отсчитываемая от срединной поверхности k-го слоя в сторону возрастания нормали к исходной поверхности оболочки. В [31] решена сложная динамическая задача расчета осесимметрично нагруженной и закрепленной многослойной ортотропной оболочки в случае упругопластического деформирования материалов слоев. Позднее в [33...35] использована гипотеза ломаной линии в виде (1.4), (1.5) при исследовании колебаний многослойных ортотропных пластин и цилиндрических оболочек, слои которых изготовлены из упругих и вязкоупругих слоев.

В [36] для анализа многослойных анизотропных пластин используют гипотезу ломаной линии еще в одной форме, впервые предложенной Готландом в [37]:

$$u_i{}^{(k)}=v_i{}^{(k-1)}+(z-\delta_{k-1})\frac{v_i{}^{(k)}-v_i{}^{(k-1)}}{h_k}; \quad u_3{}^{(k)}=w. \tag{1.6}$$

Переход от локальных координат α_1, α_2, z_k в (1.4) к глобальным координатам α_1, α_2, z показывает, что обе системы кинематических гипотез (1.4), (1.5) и (1.6) эквивалентны.

В [38] для описания динамического поведения пластин к каждому ортотропному слою применяется кинематическая гипотеза Тимошенко в виде (1.4). Если удовлетворить затем условиям непрерывности (1.3), то приходим к гипотезе ломаной линии (1.1) с той лишь разницей, что вместо тангенциальных перемещений «нижней» лицевой плоскости пластины u_i в [38] будут фигурировать тангенциальные перемещения срединной плоскости «нижнего» слоя $u_{i0}^{(1)}$. Из принципа Гамильтона—Остроградского получены $2N+3$ уравнений движения относительно функций $u_{i0}^{(1)}$, w, $u_{i1}^{(k)}$. Дано также сравнение с двумя теориями, построенными на основе гипотез, привлекаемых для пакета в целом.

В [39] обобщены обсуждаемые уравнения на случай учета межслоевых касательных напряжений $\tau_i^{(n)}=\sigma_{i3}^{(n)}(\delta_n)=\sigma_{i3}^{(n+1)}(\delta_n)$ $(n=1,2,\ldots,N-1)$. В уравнения равновесия, полученные в [39] решением вариационной задачи на условный экстремум (в качестве множителей Лагранжа используются функции $\tau_i^{(n)}$), наряду с функциями $u_{i0}^{(1)}$, w, $u_{i1}^{(k)}$ вошли межслоевые касательные напряжения $\tau_i^{(n)}$. Обратим внимание, что $\tau_i^{(0)}=p_i^-$ и $\tau_i^{(N)}=p_i^+$ — известные функции. Сам факт присутствия в уточненных уравнениях $2(N-1)$ дополнительных неизвестных функций $\tau_i^{(n)}$ приводит, несомненно, к значительному усложнению задачи, однако позволяет в первом приближении разрешить одну из важнейших задач механики композитных материалов. Если теперь из полученных в работе [39] разрешающих уравнений исключить функции $\tau_i^{(n)}$, то придем к уравнениям [7].

Этот подход в дальнейшем получил большое распространение и был использован для вычисления межслойных напряжений многими авторами, например в [40]. Суть работы состоит в том, что каждый анизотропный слой оболочки может быть описан уравнениями теории оболочек типа Тимошенко. Таким образом, для всей оболочки в целом имеем $5N$ уравнений равновесия относительно функций $u_{i0}^{(k)}$, $u_{i1}^{(k)}$, w [см. (1.4)] и $\tau_i^{(n)}$, $\tau_3^{(n)}$, где $\tau_3^{(n)}=\sigma_{33}^{(n)}(\delta_n)=\sigma_{33}^{(n+1)}(\delta_n)$ — межслойные нормальные напряжения $(n=1,2,\ldots,N-1)$. Нетрудно убедиться, что здесь введено $4N+1$ искомых кинематических и $3(N-1)$ статических функций. В качестве дополнительных уравнений, которые необходимо добавить, чтобы замкнуть задачу, возьмем $2(N-1)$ уравнений непрерывности (1.3) для тангенциальных компонент вектора перемещений. С другой стороны, если сразу воспользоваться условиями непрерывности (1.3), то число кинематических функций, подлежащих определению, можно уменьшить с $4N+1$ до $2N+3$. Фактически, это означает использование для всего пакета гипотезы ломаной линии в форме (1.1).

К сожалению, в работах [40, 41] изложенная методика реализована лишь для двухслойной цилиндрической оболочки. Общий подход к решению обсуждаемых задач дан в [42...44], где разработан продуктивный метод решения симметричных задач теории пластин и оболочек из слоистых композитов. Исключив из разрешающей системы уравнений перемещения, в [43] пришли к системе $2(N-1)$ интегральных уравнений типа Вольтерры относительно межслоевых касательных и нормальных напряжений $\tau_1^{(n)}$, $\tau_3^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots,N-1)$, решение которых осуществляется при помощи преобразования Лапласа. В [45] рассмотрена задача осесимметричного деформирования многослойных цилиндрических оболочек в случае несовершенного клеевого соединения слоев.

Оригинальный подход к построению теории многослойных ортотропных оболочек предложен в [46, 47]. Для поперечных касательных напряжений k-го слоя оболочки принята аппроксимация

$$\sigma_{i3}^{(k)}=f_i^{(k)}(z_k)\varphi_i^{(k)}+z_k/h_k(\tau_i^{(k)}-\tau_i^{(k-1)})+1/2(\tau_i^{(k)}+\tau_i^{(k-1)}), \quad (1.7)$$

где $f_i^{(k)}(z_k)$ — априори заданные функции, непрерывные на промежутке $[-h_k/2,\ h_k/2]$ и удовлетворяющие условиям $f_i^{(k)}(\pm h_k/2)=0$; $\varphi_i^{(k)}$ — искомые функции сдвига. Поперечное обжатие оболочки по толщине пакета не учитывается. Как видно из формулы (1.7), поперечные касательные напряжения являются непрерывными функциями поперечной координаты, а на лицевых поверхностях они удовлетворяют заданным граничным условиям $\sigma_{i3}^{(1)}(-h_1/2)=\tau_i^{(0)}$; $\sigma_{i3}^{(N)}(h_N/2)=\tau_i^{(N)}$. Введение далее $\sigma_{i3}^{(k)}$ из (1.7) в соотношения закона Гука для поперечных компонент тензоров напряжений и деформаций приводит к формулам для поперечных сдвигов k-го слоя. Интегрируя полученные соотношения по толщине k-го слоя и привлекая условия непрерывности (1.3), получаем окончательные формулы для тангенциальных перемещений $u_i^{(k)}$. Статическим путем получены уравнения движения многослойных ортотропных цилиндрических оболочек. Одним из недостатков теории [46] является то обстоятельство, что в ней не установлено с помощью вариационных принципов соответствия между кинематическими и силовыми характеристиками оболочки. Вопрос о внутренних усилиях и моментах, совместимых с принятыми гипотезами, имеет принципиальное значение для любой уточненной теории, поскольку неучет их влияния приводит нередко к качественно иной задаче, описываемой системой дифференциальных уравнений пониженного порядка.

Близкий подход представлен в [48], где обжатие пластины по толщине также не учитывается, т. е. $u_3^{(k)}=w$. Остальные характеристики напряженно-деформированного состояния пластины представлены в виде рядов по полиномам Лежандра. Естественно, что использование таких представлений при сведении трехмерной задачи теории упругости к двухмерной задаче теории многослойных пластин и оболочек приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений, поэтому в рядах для тангенциальных компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений удержано по два члена, а в рядах для поперечных касательных напряжений — три члена. Если теперь отвлечься от математики и обратиться к механике, то можно видеть, что фактически слои пластины деформируются по сдвиговой модели Тимошенко. Однако этот подход имеет существенное отличие от описанного в [42...44], на которое необходимо обратить внимание: эта методика дает возможность вывести аналитические формулы для поперечных касательных напряжений и проследить закон их изменения по толщине пакета. Действительно, после удовлетворения условий непрерывности на поверхностях раздела слоев и граничных условий на лицевых поверхностях пластины в [48] получены формулы

$$\sigma_{i3}^{(k)}=\left[P_0\left(\frac{2z_k}{h_k}\right)-P_2\left(\frac{2z_k}{h_k}\right)\right]\frac{Q_i^{(k)}}{h_k}+\frac{1}{2}P_1\left(\frac{2z_k}{h_k}\right)(\tau_i^{(k)}-\tau_i^{(k-1)})+$$
$$+\frac{1}{2}P_2\left(\frac{2z_k}{h_k}\right)(\tau_i^{(k)}+\tau_i^{(k-1)}). \qquad (1.8)$$

Здесь $P_0(\zeta)=1$; $P_1(\zeta)=\zeta$; $P_2(\zeta)=(3\zeta^2-1)/2$ — полиномы Лежандра; $Q_i^{(k)}$ — поперечные удельные усилия k-го слоя. Сравнение аппроксимаций (1.7) и (1.8) показывает, что в случае параболической зависимости функций $f_i^{(k)}$ от z_k обе формулы с практической точки зрения равноценны. Таким образом, используя представления [48], можно дать приемлемое механическое толкование статической гипотезы Сюй—Вана.

2. Ни в одной из проанализированных в п. 1 работ не учтено поперечное обжатие слоев, поэтому здесь сконцентрируем внимание только на этом вопросе. В рамках теории многослойных оболочек Григолюка—Чулкова [49] учет нормальных деформаций в поперечном направлении дан в работах [50, 51], где рассмотрена многослойная пластина, выполненная из произвольного числа трансверсально-изотропных слоев. Тангенциальные и нормальное перемещения в k-м слое пластины аппроксимируются линейными функциями поперечной координаты (см. (1.1) при $i=1, 2, 3$). Из принципа возможных перемещений выведены $3(N+1)$ уравнений равновесия в удельных усилиях и моментах. Общий порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений равен $6(N+1)$.

Затем в работах [10, 52...55] были рассмотрены в произвольных криволинейных координатах многослойные анизотропные оболочки как в геометрически линейной, так и нелинейной постановках, а также многослойные изотропные оболочки в физически нелинейной постановке. Считается, что все компоненты вектора перемещений распределены по толщине k-го слоя согласно кинематической гипотезе Тимошенко (см. (1.4) при $i=1, 2, 3$). Из смешанного вариационного принципа получены уравнения равновесия оболочки, соответствующие им граничные условия, уравнения неразрывности деформаций. В линейной теории многослойных анизотропных оболочек доказаны теорема единственности, теорема Клапейрона, теорема взаимности Бетти, принцип минимума потенциальной энергии деформации, принцип минимума дополнительной работы. Показана также самосопряженность линейной краевой задачи и ортогональность форм собственных колебаний. В еще более общей постановке нелинейные уравнения многослойных анизотропных оболочек с учетом больших деформаций построены в [12, 56].

В работе [57] представлен усовершенствованный по сравнению с [21] вариант геометрически нелинейной теории многослойных анизотропных оболочек со слоями переменной толщины. В [37, 58] обобщены уравнения движения многослойных анизотропных пластин и пологих оболочек, полученные в [13], на случай учета всех компонентов напряженно-деформированного состояния и инерции конструкции.

Более подробно проанализируем методику расчета многослойных анизотропных оболочек сложной геометрии. В работе [59] рассмотрен модифицированный вариант теории Григолюка—Чулкова. Ввод для каждого слоя оболочки приведенного коэффициента Пуассона позволил записать разрешающие уравнения в компактном виде, что упростило численную реализацию осесимметричных задач статики и термоупругости многослойных оболочек вращения с произвольной формой меридиана на ЭВМ [60]. Авторами [32] построен вариант теории многослойных анизотропных оболочек при среднем изгибе (по К. З. Галимову). В качестве искомых функций принимаются перемещения внешних поверхностей оболочки $v_i^{(0)}$, $v_i^{(N)}$ и поверхностей раздела слоев $v_i^{(n)}$ ($n=1,2,\ldots,N-1$; см. также (1.4), (1.5) при $i=1, 2, 3$), что приводит к ленточной трехдиагональной матрице дифференциальных операторов задачи. Рассмотрен класс оболочек сложной геометрии со слоями постоянной [32] и переменной [61] толщины. В [62] предложена практически важная модель многослойной оболочки, собранной из жестких моментных слоев переменной толщины и тонких безмоментных слоев.

Вариант теории многослойных анизотропных оболочек вращения переменной толщины, учитывающий кинематическую и физическую нелинейность, построен в [63, 64]. Теория основана на принятии кинематических гипотез типа гипотезы Тимошенко в каждом слое. Разработан алгоритм численного решения осесимметричных задач оболочек вращения сложной формы на ЭВМ.

Нелинейный вариант теории многослойных оболочек, позволяющий исследовать реальный закон распределения поперечных касательных напряжений по толщине пакета [23, 29], позднее был обобщен в [65] на случай локального обжатия слоев по толщине. Для поперечных нормальных напряжений была принята аппроксимация

$$\sigma_{33}^{(k)}=g_0(z)\psi^{(0)}+g_k(z)\psi^{(k)}+q^-+z(q^+-q^-)/h. \tag{2.1}$$

Здесь q^-, q^+ — нормальные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях оболочки; $g_0(z)$, $g_k(z)$ — априори заданные функции, непрерывные и удовлетворяющие условиям $g_0(0)=g_0(h)=0$; $g_k(z)\equiv 0$, $z\in[0,\delta_{k-1}]\cup[\delta_k,h]$. Если функции $f_0(z)$, $f_k(z)$ из (1.2) изменяются по закону квадратной параболы, то в [65] в качестве функций $g_0(z)$, $g_k(z)$ рекомендуется выбирать кубические полиномы, что согласуется с третьим уравнением равновесия теории упругости. Дан параметрический анализ распределения поперечных компонент тензора напряжений (1.2), (2.1) по толщине оболочки с приложением к расчету современных пневматических шин.

По-видимому, впервые полиномы Лежандра для построения теории многослойных оболочек применены в [66, 67]. Здесь рассмотрена толстая, сжимаемая в поперечном направлении оболочка, изготовленная из анизотропных слоев. Перемещения в пределах каждого слоя представлены в виде рядов по полиномам Лежандра. Из принципа возможных перемещений получены геометрически нелинейные уравнения равновесия оболочки в удельных усилиях и моментах, а также соответствующие им граничные условия. Подробно исследован вопрос о погрешности, вносимой количеством удерживаемых членов в рядах для разложения искомых функций. Численные результаты, иллюстрирующие эффективность предлагаемого подхода, даны в [68, 69].

В работах [70...72] представлены все компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений k-го слоя оболочки в виде рядов по полиномам Лежандра. Авторы, используя общую теорему об аппроксимации функции и ее первой производной полиномами Лежандра, предлагают удерживать в рядах для тангенциальных компонент тензора напряжений $m+1$ членов, в рядах же для поперечных касательных и нормальных напряжений сохранено соответственно по $n+3$ и $n+2$ членов $(m \leqslant n+1)$. Эти разложения означают, что в рядах для тангенциальных и нормального перемещений должно быть удержано $m+1$ и $n+1$ членов соответственно. Описанное приближение задачи названо $\{m, n\}$-аппроксимацией в теории слоистых анизотропных оболочек. Основное внимание в монографии [70] уделено $\{1, 0\}$-аппроксимации (достаточно подробно проанализирована в п. 1), в которой поперечное обжатие слоев не учитывается [48].

В стороне от темы нашего обзора осталась теория [73], в которой порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений зависит от числа слоев. В этой теории в явной форме кинематические гипотезы не используются, а все построения опираются на концепцию смеси, получившей развитие в механике композитных материалов.

Отметим подход [74], в основе которого лежит идея численного интегрирования линейных уравнений теории упругости для многослойной анизотропной оболочки. Численные результаты, полученные на основе этого подхода при частных видах граничных условий, являются практически точными и могут быть использованы в качестве эталонных.

3. Анализ работ, посвященных разработке общих моделей упругих многослойных оболочек с учетом локальных эффектов, показал, что большие усилия ученых сосредоточены на построении таких моделей, в которых вектор перемещений и поперечные компоненты тензора напряжений являются непрерывными функциями поперечной координаты по всей оболочке, в том числе и на поверхностях раздела слоев, а на внешних поверхностях они удовлетворяют заданным граничным условиям. Должны также выполняться уравнения закона Гука для поперечных компонент тензора напряжений не в интегральном смысле, как в теории оболочек типа Тимошенко, а точно.

Этим условиям и уравнениям можно удовлетворить, если пойти, например, таким путем. Пусть компоненты вектора перемещений представлены в виде степенных рядов. Удержав в рядах по четыре первых члена, получим

$$u_j^{(k)} = u_{j0}^{(k)} + \zeta_k u_{j1}^{(k)} + \zeta_k^2 u_{j2}^{(k)} + \zeta_k^3 u_{j3}^{(k)}, \tag{3.1}$$

где $\zeta_k = 2z_k/h_k$; $-h_k/2 \leqslant z_k \leqslant h_k/2$; $j=1,\ 2,\ 3$; $k=1, 2, \ldots, N$.

Из соотношений (3.1) и условий непрерывности на поверхностях раздела слоев следуют более удобные формулы

$$u_j^{(k)} = \frac{v_j^{(k)} + v_j^{(k-1)}}{2} + \zeta_k \frac{v_j^{(k)} - v_j^{(k-1)}}{2} + (\zeta_k^2 - 1)\, u_{j2}^{(k)} + (\zeta_k^3 - \zeta_k)\, u_{j3}^{(k)}. \tag{3.2}$$

Здесь $v_j^{(n)}$ $(n=0, 1, \ldots, N)$ — тангенциальные и нормальное перемещения лицевых поверхностей слоев.

Чтобы исключить оставшиеся функции $u_{j2}^{(k)}$, $u_{j3}^{(k)}$, воспользуемся законом Гука, который для линейно-упругой многослойной изотропной пластины можно записать в виде

$$\sigma_{i3}^{(k)}=G_k\left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial z_k}+\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_i}\right) \quad (i=1, 2);$$
$$\sigma_{33}^{(k)}=\lambda_k\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2}\right)+(\lambda_k+2G_k)\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial z_k}, \tag{3.3}$$

где x_1, x_2 — декартовы координаты плоскости приведения; λ_k, G_k — упругие постоянные k-го слоя. Вводя перемещения (3.2) в (3.3) и пользуясь условиями непрерывности $\sigma_{j3}^{(k)}(h_k/2)=\tau_j^{(k)}$; $\sigma_{j3}^{(k)}(-h_k/2)=$ $=\tau_j^{(k-1)}(j=1, 2, 3)$, получим выражения

$$u_{i2}^{(k)}=\frac{h_k}{8}\left(\frac{\tau_i^{(k)}-\tau_i^{(k-1)}}{G_k}-\frac{\partial(v_3^{(k)}-v_3^{(k-1)})}{\partial x_i}\right); \tag{3.4}$$

$$u_{i3}^{(k)}=\frac{h_k}{8}\left(\frac{\tau_i^{(k)}+\tau_i^{(k-1)}}{G_k}-2\frac{v_i^{(k)}-v_i^{(k-1)}}{h_k}-\frac{\partial(v_3^{(k)}+v_3^{(k-1)})}{\partial x_i}\right) \quad (i=1, 2);$$

$$u_{32}^{(k)}=$$
$$=\frac{h_k}{8}\left[\frac{\tau_3^{(k)}-\tau_3^{(k-1)}}{\lambda_k+2G_k}-\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2G_k}\left(\frac{\partial(v_1^{(k)}-v_1^{(k-1)})}{\partial x_1}+\frac{\partial(v_2^{(k)}-v_2^{(k-1)})}{\partial x_2}\right)\right];$$

$$u_{33}^{(k)}=\frac{h_k}{8}\left[\frac{\tau_3^{(k)}+\tau_3^{(k-1)}}{\lambda_k+2G_k}-2\frac{v_3^{(k)}-v_3^{(k-1)}}{h_k}-\frac{\lambda_k}{\lambda_k+2G_k}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial(v_1^{(k)}+v_1^{(k-1)})}{\partial x_1}+\frac{\partial(v_2^{(k)}+v_2^{(k-1)})}{\partial x_2}\right)\right].$$

Если на внешних поверхностях $z_1=-h_1/2$, $z_N=h_N/2$ заданы поверхностные нагрузки, то известными считаются функции $\tau_j^{(0)}$, $\tau_j^{(N)}$. В противном случае известными являются перемещения граничных поверхностей $u_j^{(0)}$, $u_j^{(N)}$. Таким образом, из $6(N+1)$ функций, фигурирующих в соотношениях (3.2), (3.4), независимыми будут только $6N$ функций.

Аппроксимация поля перемещений в многослойной пластине с помощью выражений (3.2), (3.4) удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям и может быть принята за основу при построении внутренне непротиворечивых моделей многослойных анизотропных оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. — 1972. — Т. 8, № 6. — С. 3...17.

2. *Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Т. 15. Механика деформируемого твердого тела. — М., 1983. — С. 3...68.

3. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. — М., 1980. — 376 с.

4. *Григолюк Э. И.* Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. — 1957. — № 1. — С. 77...84.

5. *Григолюк Э. И.* Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. — 1958. — № 1. — С. 26...34.

6. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Теория вязко-упругих многослойных оболочек с жесткими заполнителями при конечных прогибах // Прикл. механика и техн. физика. — 1964. — № 5. — С. 109...117.

7. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. Механика. — 1965. — № 5. — С. 68...80.

8. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1967. — № 1. — С. 163...169.

9. *Grigoliouk E. I., Chulkov P. P.* On the theory of multilayered shells // Contributions to the Theory of Aircraft Structures. — Delft, 1972. — P. 171...183.

10. *Либреску Л.* Нелинейная теория упругих анизотропных многослойных оболочек // Избранные проблемы прикладной механики. — М., 1974. — С. 453...466.

11. *Чепига В. Е.* Линеаризованные уравнения устойчивости толстых многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1971. — № 2. — С. 33...41.

12. *Epstein M., Glockner P. G.* Nonlinear analysis of multilayered shells // Intern. J. Solids and Structures. — 1977. — Vol. 13, N 11. — P. 1081...1089.

13. *Чулков П. П.* Уравнения колебаний упругих слоистых оболочек // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1970. — Вып. 4. — С. 19...29.

14. *Баев Л. В.* Применение приближенной теории слоистых пластин, учитывающей поперечный сдвиг // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1970. — Вып. 4. — С. 11...18.

15. *Баев Л. В., Чулков П. П.* К расчету слоистых пластин // Механика полимеров. — 1969. — № 6. — С. 1135.

16. *Насонкин Ю. Д.* Об отыскании частного решения для уравнения, описывающего изгиб многослойной пластины // Механика полимеров. — 1975. — № 6. — С. 1131.

17. *Кохманюк С. С., Шупиков А. Н.* Деформирование многослойных пластин при нестационарном нагружении // Пробл. машиностроения. — Киев, 1980. — Вып. 10. — С. 20...22.

18. *Богданович А. Е.* Уравнения многослойных композитных цилиндрических оболочек на основе гипотезы прямой линии // II конф. молодых специалистов по механике композитных материалов. Тез. докл. — Рига, 1979. — С. 68...69.

19. *Богданович А. Е., Ярве Э. В.* Анализ напряжений в многослойных балках при поперечном динамическом изгибе // Механика композит. материалов. — 1983. — № 5. — С. 824...837.

20. *Нарусберг В. Л., Паже Л. А.* Влияние кинематической неоднородности на критические параметры устойчивости цилиндрических слоистых оболочек // Механика композит. материалов. — 1982. — № 2. — С. 271...278.

21. *Буяков И. А.* Нелинейные уравнения теории типа Тимошенко многослойных анизотропных оболочек // Механика композит. материалов. — 1979. — № 3. — С. 501...507.

22. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 5. — С. 1077...1079.

23. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Теория и численное решение задач статики многослойных армированных оболочек // Механика композит. материалов. — 1986. — № 4. — С. 643...650.

24. *Куликов Г. М.* О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // Прикл. механика. — 1986. — Т. 22, № 12. — С. 66...72.

25. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Вариант нелинейной теории упругих многослойных пологих оболочек // Механика композит. материалов. — 1985. — № 5. — С. 853...860.

26. *Swift G. W., Heller R. A.* Layered beam analysis // J. Eng. Mechanics Division. Proc. ASCE. — 1974. — Vol. 100, N 2. — P. 267...282.

27. *Филитов С. В.* Устойчивость слоистых оболочечных конструкций // Расчеты на прочность и жесткость. — М., 1982. — Вып. 4. — С. 139...152.

28. *Филитов С. В.* Вычисление матрицы жесткости слоистой оболочки // Расчеты на прочность и жесткость. — М., 1983. — Вып. 5. — С. 123...129.

29. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Эффект неоднородности касательных напряжений в современных шинах // Механика композит. материалов. — 1986. — № 5. — С. 870...877.

30. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Осесимметричная деформация анизотропных слоистых оболочек вращения сложной формы // Механика композит. материалов. — 1981. — № 4. — С. 637...645.

31. *Баженов В. Г., Журавлев Е. А.* Вариационно-разностный метод решения нелинейных осесимметричных задач динамики слоистых оболочек // Прикл. проблемы прочности и пластичности. — Горький, 1979. — Вып. 13. — С. 36...45.

32. *Паймушин В. Н., Демидов В. Г.* Об одном варианте соотношений теории среднего изгиба многослойных оболочек сложной геометрии // Статика и динамика оболочек. — Казань, 1979. — Вып. 12. — С. 53...60.

33. *Alam N., Asnani N. T.* Vibration and damping analysis of a multilayered cylindrical shell. Pt 1: Theoretical analysis // AIAA J. — 1984. — Vol. 22, N. 6. — P. 803...810.

34. *Alam N., Asnani N. T.* Vibration and damping analysis of a multilayered cylindrical shell. Pt 2: Numerical results // AIAA J. — 1984. — Vol. 22, N 7. — P. 975...981.

35. *Alam N., Asnani N. T.* Vibration and damping analysis of a multilayered rectangular plates with constrained viscoelastic layers // J. Sound and Vibration. — 1984. — Vol. 97, N 4. — P. 597...614.

36. *Seide P.* An improved approximate theory for the bending of laminated plates // Mechanics Today. — Oxford; N. Y., 1980. — Vol. 5. — P. 451...466.

37. *Gotteland M.* On theory for anisotropic and laminated plates // 3rd Intern. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology. Pt M. — Amsterdam; Oxford, 1975. — Vol. 5, M 5/4. — 7 p.

38. *Sun C.-T., Whitney J. M.* Theories for the dynamic response of laminated plates // AIAA J. — 1973. — Vol. 11, N 2. — P. 178...183.
39. *Mau S. T.* A refined laminated plate theory // Trans. ASME. — 1973. — Vol. E40, N 2. — P. 606...607.
40. *Waltz T. L., Vinson J. R.* Interlaminar stresses in laminated cylindrical shells of composite materials // AIAA J. — 1976. — Vol. 14, N 9. — P. 1213...1218.
41. *Zukas J. A., Vinson J. R.* Laminated transversely isotropic cylindrical shells // Trans. ASME. — 1971. — Vol. E38, N 2. — P. 109...115.
42. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Щербина Н. Н.* Контактная жесткость слоистых цилиндрических оболочек. 2. Матричный метод решения контактных задач для многослойных цилиндрических оболочек // Механика композит. материалов. — 1986. — № 2. — С. 276...280.
43. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А., Якимов Ф. П.* Контактные задачи для слоистых пластин, подверженных механическим и температурным воздействиям // Прикл. механика. — 1978. — Т. 14, № 5, — С. 79...85.
44. *Пелех Б. Л., Щербина Н. Н.* Контактная жесткость слоистых цилиндрических оболочек. 1. Аналитическое решение задачи в осесимметричном случае // Механика композит. материалов. — 1983. — № 4. — С. 663...668.
45. *Максимук А. В., Щербина Н. Н.* О деформативности многослойных цилиндрических оболочек в случае несовершенного контакта слоев // Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них. Тез. докл. II Всесоюз. науч.-техн. семинара. — Киев, 1984. — С. 35...36.
46. *Hsu T.-M., Wang J. T.-S.* A theory of laminated cylindrical shells consisting of layers of orthotropic laminae // AIAA J. — 1970. — Vol. 8, N 12. — P. 2141...2146.
47. *Hsu T.-M., Wang J. T.-S.* Rotationally symmetric vibrations of orthotropic layered cylindrical shells // J. Sound and Vibration. — 1971. — Vol. 16, N 4. — P. 473...487.
48. *Крочак А. М.* К вопросу определения концентрации напряжений в трансверсально-изотропной многослойной пластине // Базальтоволокнистые композиционные материалы и конструкции. — Киев, 1980. — С. 191...195.
49. *Иванов А. В., Чулков П. П.* Учет поперечных деформаций заполнителя в задачах устойчивости трехслойных пластин с различными несущими слоями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1969. — № 6. — С. 101...107.
50. *Баев Л. В.* Расчет многослойных пластин с учетом поперечного сдвига и обжатия // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1970. — Вып. 6. — С. 92...104.
51. *Баев Л. В.* К расчету регулярных пластин, составленных из произвольного числа слоев // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1976. — Вып. 25. — С. 10...17.
52. *Либреску Л.* К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек. Ч. 1 // Механика полимеров. — 1975. — № 6. — С. 1038...1050.
53. *Либреску Л.* К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек. Ч. 2 // Механика полимеров. — 1976. — № 1. — С. 100...109.
54. *Librescu L. I.* Some results concerning the refined theory of elastic multilayered shells. Pt I. The physically nonlinear theory // Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. de Mecanique Appl. — 1975. — Vol. 20, N 1. — P. 93...105.
55. *Librescu L. I.* Some results concerning the refined theory of elastic multilayered shells. Pt 1. The physically nonlinear theory // Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. de Mecanique Appl. — 1975. — Vol. 20, N 2. — P. 285...296.
56. *Epstein M., Glockner P. G.* Multilayered shells and directed surfaces // Intern. J. Eng. Sci. — 1979. — Vol. 17, N 5. — P. 553...562.
57. *Буяков И. А.* Об учете деформаций в направлении нормали в нелинейной теории типа Тимошенко многослойных оболочек // Механика композит. материалов. — 1980. — № 2. — С. 358...359.
58. *Нарусберг В. Л., Паже Л. А.* К расчету спектров собственных колебаний слоистых оболочек средней толщины // Механика композит. материалов. — 1985. — № 2. — С. 298...304.
59. *Чулков П. П., Паймушин В. Н.* К проблеме расчета многослойных оболочек сложной геометрии // Статика сооружений. — Киев, 1978. — С. 69...72.
60. *Паймушин В. Н., Демидов В. Г.* К численному решению осесимметричных краевых задач статики и термоупругости многослойных оболочек вращения // Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных и монолитных авиационных конструкций. — Казань, 1981. — С. 79...84.
61. *Паймушин В. Н., Демидов В. Г.* Уравнения теории многослойных оболочек со слоями переменной толщины и их применение к задачам теории упругости в неканонических областях // Исследования по теории пластин и оболочек. Ч. 2. — Казань, 1985. — Вып. 18. — С. 54...65.
62. *Паймушин В. Н., Петрушенко Ю. Я., Саитов И. Х.* Обобщенная модель механики многослойных оболочек со слоями переменной толщины // Прочность и колебания авиационных конструкций. — Казань, 1984. — С. 37...43.
63. *Новичков Ю. Н., Кузьмин А. С.* Исследование напряженно-деформированного состояния слоистых оболочек вращения с приложением к расчету шин // Механика композит. материалов. — 1984. — № 6. — С. 1023...1029.
64. *Кузьмин А. С., Новичков Ю. Н., Соколов С. Л., Третьяков О. Б.* Статика слоистых эластокомпозитных оболочек вращения с приложением к расчету шин //

VI Всесоюз. конф. по механике полимерных и композит. материалов. Тез. докл. — Рига, 1986. — 82 с.

65. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Современные методы расчета пневматических шин // II Всесоюз. науч.-техн. совещание «Динамика и прочность автомобиля». Тез. докл. — М., 1986. — 84 с.

66. *Чепига В. Е.* К уточненной теории слоистых оболочек // Прикл. механика. — 1976. — Т. 12, № 11. — С. 45...49.

67. *Чепига В. Е.* О построении теории многослойных анизотропных оболочек с заданной условной точностью порядка h^N // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1977. — № 4. — С. 113...120.

68. *Чепига В. Е.* Численный анализ уравнений уточненной теории слоистых оболочек. — Л., 1986. — 14 с. — Деп. в ВИНИТИ 14.01.86; № 290-В.

69. *Чепига В. Е.* Исследование устойчивости многослойных оболочек по уточненной теории. — Л., 1986. — 14 с. — Деп. в ВИНИТИ 14.01.86, № 289-В.

70. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. — Киев, 1982. — 296 с.

71. *Пелех Б. Л., Лазько В. А., Мачуга О. С.* Вариационный метод исследования концентрации напряжений возле межслойных дефектов в слоистых анизотропных оболочках и пластинах // Прикл. механика. — 1985. — Т. 21, № 11. — С. 124...128.

72. *Лазько В. А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 2. Обобщение уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композит. материалов. — 1982. — № 1. — С. 77...84.

73. *Хорошун Л. П.* Концепция смеси в построении теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. — 1985. — Т. 21, № 4. — С. 110...118.

74. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. — Киев, 1985. — 190 с.

Московский автомеханический институт

Тамбовский институт химического машиностроения

Поступило в редакцию 27.05.87