

Г. М. Куликов, С. В. Плотникова

Тамбовский государственный технический университет, Россия

**РАСЧЕТ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
СЛЕДЯЩИХ НАГРУЗОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ТОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ**

G. M. Kulikov and S. V. Plotnikova

**CALCULATION OF COMPOSITE STRUCTURES SUBJECTED
TO FOLLOWER LOADS BY USING A GEOMETRICALLY EXACT SHELL
ELEMENT**

Keywords: multilayer composite shell, follower load, geometrically exact shell element, 7-parameter shell model

Based on a 7-parameter shell model, a numerical algorithm has been developed for solving the geometrically nonlinear problem of a multilayer composite shell subjected to a follower pressure and undergoing large displacements and rotations. As unknowns, six displacements of the outer surfaces and additionally the transverse displacement of midsurface of the shell are chosen. This allows one to use the Green–Lagrange strain tensor, introduced earlier by the authors, which exactly represents arbitrarily large rigid-body displacements of the shell in curvilinear coordinates of the reference surface. A geometrically exact solid shell element is formulated, which permits one to solve the nonlinear deformation problem for thin-walled composite structures subjected to a follower pressure by using a very small number of load steps.

Ключевые слова: оболочка композитная многослойная, нагрузка следящая, элемент оболочки геометрически точный, модель оболочки 7-параметрическая

Разработан алгоритм численного решения геометрически нелинейной задачи для многослойной композитной оболочки, нагруженной следящим давлением и подверженной большим перемещениям и поворотам, на основе 7-параметрической модели оболочки. В качестве искоемых функций выбраны шесть перемещений внешних поверхностей и дополнительно поперечное перемещение срединной поверхности оболочки. Поэтому возможно использовать введенный ранее авторами тензор деформаций Грина—Лагранжа, точно представляющий произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных координатах отсчетной поверхности. Построен

геометрически точный трехмерный элемент оболочки, который позволяет решать задачу о нелинейном деформировании тонкостенных композитных конструкций под действием следящего давления за малое число шагов по нагрузке.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется разработке *изопараметрических* трехмерных конечных элементов оболочки, дающих удовлетворительные результаты при решении геометрически нелинейных задач механики тонкостенных композитных конструкций под действием следящих нагрузок [1—3]. Их особенностью является то, что начальная и деформированная конфигурации оболочки интерполируются единообразно в глобальной декартовой системе координат. Это дает возможность корректно описать большие перемещения оболочки как жесткого тела. Однако изопараметрический элемент оболочки вычислительно неэффективен при расчете композитных конструкций, нагруженных следящим давлением и подверженных произвольно большим поворотам, поскольку требует достаточно большого числа шагов по нагрузке.

Альтернативными являются *геометрически точные* конечные элементы оболочки на основе введенных в [4—9] нелинейных деформационных соотношений 6- и 7-параметрических пространственных моделей оболочек, которые точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных координатах отсчетной поверхности. Термин “геометрически точный” означает, что отсчетная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями, в частности сплайнами [10—12], которые составляют основу современных САД систем. При этом векторы перемещений внешних и срединной поверхностей представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью оболочки. Именно это обстоятельство позволяет добиться существенного снижения числа шагов по нагрузке.

В настоящей работе представлен более общий геометрически точный 7-параметрический билинейный элемент оболочки для расчета тонкостенных многослойных композитных конструкций под действием следящих нагрузок. Для борьбы с известным в методе конечных элементов (МКЭ) явлением запиравания как сдвигового, так и мембранного, использована гибридная модель МКЭ. Согласно этой модели деформации и результирующие напряжения внутри элемента оболочки аппроксимируются самостоятельно, отдельно от перемещений. Отметим, что 6-параметрическая модель [4—8], постулирующая равномерное распределение поперечных нормальных деформаций по толщине пакета слоев, нередко приводит к пуассоновскому запираанию элемента оболочки, в то время как 7-параметрическая модель свободна от указанного недостатка [9, 13, 14].

7-параметрическая модель композитной оболочки

Рассмотрим тонкую оболочку толщиной $h = d^- + d^+$ из NL упругих анизотропных слоев постоянной толщины h_k . Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная отсчетной поверхности Ω . В качестве отсчетной поверхности примем внутреннюю поверхность какого-либо k -слоя или поверхность раздела слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам θ_1 и θ_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату θ_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности Ω (рис. 1). Пусть e_1 и e_2 — единичные векторы касательных к координатным линиям θ_1 и θ_2 ; $a_3 = e_3$ — единичный вектор внешней нормали; A_α — параметры Ламе; k_α — главные кривизны; d^A — расстояния от отсчетной поверхности до внешних поверхностей Ω^A ; $r(\theta_1, \theta_2)$ — радиус-вектор от отсчетной поверхности Ω ; $R^M(\theta_1, \theta_2)$ — радиус-вектор срединной поверхности Ω^M ; $R^A(\theta_1, \theta_2)$ — радиус-векторы внешних поверхностей Ω^A . Здесь и далее $k = 1, 2, \dots, NL$; $\alpha, \beta = 1, 2$; $i, j, l, m = 1, 2, 3$; $A = -, +$.

Для радиус-векторов срединной и внешних поверхностей оболочки имеем

$$R^I = r + z^I a_3 \quad (I = -, M, +), \tag{1}$$

$$z^- = -d^-, \quad z^+ = d^+, \quad z^M = \frac{1}{2}(z^- + z^+).$$

Отсюда следуют формулы для базисных векторов (см. рис. 1)

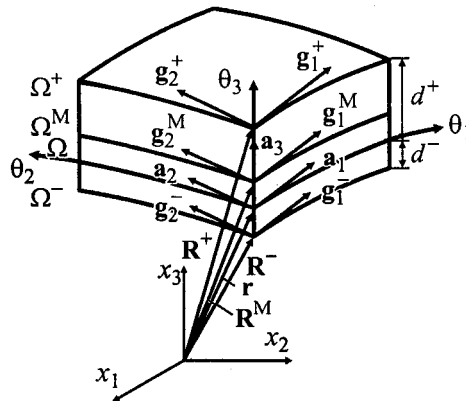


Рис. 1. Геометрия оболочки.

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} = A_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{g}_\alpha^I = \mathbf{R}_{,\alpha}^I = A_\alpha c_\alpha^I \mathbf{e}_\alpha, \quad (2)$$

$$c_\alpha^I = 1 + k_\alpha z^I \quad (I = -, M, +).$$

Будем полагать, что тангенциальные перемещения распределены по толщине оболочки согласно линейному закону, а поперечное перемещение — квадратичному [15], т.е.

$$u_\alpha = \sum_A N^A u_\alpha^A, \quad u_3 = \sum_I L^I u_3^I \quad (I = -, M, +), \quad (3)$$

где $u_\alpha^A(\theta_1, \theta_2)$ и $u_3^A(\theta_1, \theta_2)$ — тангенциальные и поперечное перемещения внешних поверхностей; $u_3^M(\theta_1, \theta_2)$ — поперечное перемещение срединной поверхности; $N^A(\theta_3)$ и $L^I(\theta_3)$ — многочлены Лагранжа первой и второй степени соответственно:

$$N^- = \frac{1}{h}(z^+ - \theta_3), \quad N^+ = \frac{1}{h}(\theta_3 - z^-), \quad (4)$$

$$L^- = N^-(N^- - N^+), \quad L^M = 4N^-N^+, \quad L^+ = N^+(N^+ - N^-).$$

При этом $L^J(z^J) = 1$, если $J = I$, и $L^J(z^J) = 0$, если $J \neq I$.

Вводя перемещения (3) с учетом (4) в деформационные соотношения пространственной теории упругости и полагая, что все компоненты тензора деформаций Грина—Лагранжа (за исключением поперечных касательных компонент) изменяются по толщине пакета слоев согласно линейному закону [9], приходим к деформационным соотношениям 7-параметрической модели оболочки

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_A N^A \varepsilon_{\alpha\beta}^A, \quad \varepsilon_{33} = \sum_A N^A \varepsilon_{33}^A, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}, \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha 3}^- + \varepsilon_{\alpha 3}^+).$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^A(\theta_1, \theta_2)$ — деформации внешних поверхностей оболочки, определяемые по формулам

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^A = c_\alpha^A \lambda_{\alpha\beta}^A + c_\beta^A \lambda_{\beta\alpha}^A + \sum_i \lambda_{i\alpha}^A \lambda_{i\beta}^A, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^A = c_\alpha^A \beta_\alpha^A + \lambda_{3\alpha}^A + \sum_i \beta_i^A \lambda_{i\alpha}^A, \quad (6)$$

$$2\varepsilon_{33}^A = 2\beta_3^A + \sum_i \beta_i^A \beta_i^A,$$

где

$$\lambda_{\alpha\alpha}^A = \left(\frac{1}{A_\alpha} u_\alpha^A \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_\alpha^A + B_{\alpha\beta} u_\beta^A + k_\alpha u_3^A \quad (\beta \neq \alpha),$$

$$\lambda_{\beta\alpha}^A = \left(\frac{1}{A_\alpha} u_\beta^A \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_\beta^A - B_{\alpha\beta} u_\alpha^A \quad (\beta \neq \alpha), \quad (7)$$

$$\lambda_{3\alpha}^A = \left(\frac{1}{A_\alpha} u_3^A \right)_{,\alpha} + B_{\alpha\alpha} u_3^A - k_\alpha u_\alpha^A, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta},$$

$$\beta_i^- = \frac{1}{h} (-3u_i^- + 4u_i^M - u_i^+), \quad \beta_i^+ = \frac{1}{h} (u_i^- - 4u_i^M + 3u_i^+), \quad u_\alpha^M = \frac{1}{2} (u_\alpha^- + u_\alpha^+).$$

Деформационные соотношения (5)—(7) весьма привлекательны с точки зрения их использования в МКЭ, поскольку они *точно* представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела [9]. Другое достоинство этих деформационных соотношений заключается в том, что они позволяют преодолеть так называемое пуассоновское закливание (искусственное завышение жесткости оболочки в поперечном направлении) [14].

Радиус-векторы внешних поверхностей деформированной оболочки представим в виде

$$\bar{\mathbf{R}}^A = \mathbf{R}^A + \mathbf{u}^A, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}^A = \sum_i u_i^A \mathbf{e}_i. \quad (9)$$

Дифференцируя равенства (8), (9) и учитывая (2), приходим к выражениям для базисных векторов внешних поверхностей деформированной оболочки

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha^A = \bar{\mathbf{R}}_{,\alpha}^A = \mathbf{g}_\alpha^A + \mathbf{u}_{,\alpha}^A, \quad (10)$$

откуда вытекает формула для единичного вектора нормали к внешней поверхности деформированной оболочки

$$\mathbf{n}^A = \frac{1}{|\bar{\mathbf{g}}_1^A \times \bar{\mathbf{g}}_2^A|} \bar{\mathbf{g}}_1^A \times \bar{\mathbf{g}}_2^A. \quad (11)$$

Принимая во внимание известные формулы дифференцирования базисных векторов \mathbf{e}_i по координатам θ_α [16] и представления для векторов перемещений (9), получим

$$\mathbf{u}_{,\alpha}^A = A_\alpha \sum_i \lambda_{i\alpha}^A \mathbf{e}_i. \quad (12)$$

Используя соотношения (2), (10)—(12), приходим к искомой формуле для вектора нормали

$$\mathbf{n}^A = \frac{1}{\eta^A} \sum_i \eta_i^A \mathbf{e}_i, \quad (13)$$

$$\eta_1^A = \lambda_{21}^A \lambda_{32}^A - \lambda_{31}^A (c_2^A + \lambda_{22}^A), \quad \eta_2^A = \lambda_{12}^A \lambda_{31}^A - \lambda_{32}^A (c_1^A + \lambda_{11}^A), \quad (14)$$

$$\eta_3^A = (c_1^A + \lambda_{11}^A)(c_2^A + \lambda_{22}^A) - \lambda_{12}^A \lambda_{21}^A, \quad \eta^A = \sqrt{(\eta_1^A)^2 + (\eta_2^A)^2 + (\eta_3^A)^2}.$$

Отметим, что формулы (13), (14) имеют важное значение для построения геометрически точного элемента композитной оболочки под действием следящего нагружения, так как с их помощью осуществляется пересчет внешней нагрузки на *каждом шаге* итерационного процесса Ньютона—Рафсона. Именно это обстоятельство позволяет существенно уменьшить число шагов по нагрузке.

Геометрически точный гибридный билинейный элемент композитной оболочки

В работах [4, 6, 12] разработано семейство геометрически точных билинейных 6-параметрических элементов оболочки, основанных на введении независимых от перемещений деформаций. Обобщая этот метод на случай 7-параметрической модели и учитывая распределение (5), запишем

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{AS} = \sum_A N^A E_{\alpha\beta}^A, \quad \varepsilon_{33}^{AS} = \sum_A N^A E_{33}^A, \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{AS} = E_{\alpha 3}^A, \quad (15)$$

где $E_{\alpha\beta}^A(\theta_1, \theta_2)$, $E_{33}^A(\theta_1, \theta_2)$, $E_{\alpha 3}^A(\theta_1, \theta_2)$ — не зависящие от перемещений деформации внешних поверхностей оболочки.

В силу того что при построении гибридного элемента вводятся функциональные переменные разного типа, для них на каждом конечном элементе надлежит использовать независимые аппроксимации [17]. Для перемещений воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = [u_1^- \ u_2^- \ u_3^- \ u_1^+ \ u_2^+ \ u_3^+ \ u_3^M]^T, \quad \mathbf{v}_r = [u_{1r}^- \ u_{2r}^- \ u_{3r}^- \ u_{1r}^+ \ u_{2r}^+ \ u_{3r}^+ \ u_{3r}^M]^T,$$

где \mathbf{v}_r — столбцы узловых перемещений; $N_r(\xi_1, \xi_2)$ — билинейные функции формы; $\xi_\alpha = (\theta_\alpha - d_\alpha^{\text{el}}) / l_\alpha^{\text{el}}$ — нормализованные криволинейные координаты элемента; d_α^{el} — координаты центра элемента; $2l_\alpha^{\text{el}}$ — длины сторон элемента. Здесь и далее индекс $r = \overline{1, 4}$.

Для независимо введенных деформаций имеем еще более простые аппроксимации

$$\mathbf{E} = \sum_{\eta_1, \eta_2} (\xi_1)^{\eta_1} (\xi_2)^{\eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2},$$

$$\mathbf{E} = [E_{11}^- \ E_{11}^+ \ E_{22}^- \ E_{22}^+ \ E_{33}^- \ E_{33}^+ \ 2E_{12}^- \ 2E_{12}^+ \ 2E_{13} \ 2E_{23}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{00} = [E_{11}^{-00} \ E_{11}^{+00} \ E_{22}^{-00} \ E_{22}^{+00} \ E_{33}^{-00} \ E_{33}^{+00} \ 2E_{12}^{-00} \ 2E_{12}^{+00} \ 2E_{13}^{00} \ 2E_{23}^{00}]^T, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}^{01} = [E_{11}^{-01} \ E_{11}^{+01} \ E_{33}^{-01} \ E_{33}^{+01} \ 2E_{13}^{01}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{10} = [E_{22}^{-10} \ E_{22}^{+10} \ E_{33}^{-10} \ E_{33}^{+10} \ 2E_{23}^{10}]^T, \quad \mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{-11} \ E_{33}^{+11}]^T,$$

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{Q}^{00} — единичная матрица размером 10×10 . Здесь и далее $r_1, r_2 = 0, 1$.

Для результирующих напряжений [9]

$$H_{\alpha\beta}^A = \sum_k \int_{h_k} S_{\alpha\beta}^k N^A d\theta_3, \quad H_{33}^A = \sum_k \int_{h_k} S_{33}^k N^A d\theta_3, \quad H_{\alpha 3} = \sum_k \int_{h_k} S_{\alpha 3}^k d\theta_3 \quad (18)$$

примем аналогичную аппроксимацию

$$\mathbf{H} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2},$$

$$\mathbf{H} = [H_{11}^- \ H_{11}^+ \ H_{22}^- \ H_{22}^+ \ H_{33}^- \ H_{33}^+ \ H_{12}^- \ H_{12}^+ \ H_{13} \ H_{23}]^T,$$

$$\mathbf{H}^{00} = [H_{11}^{-00} \ H_{11}^{+00} \ H_{22}^{-00} \ H_{22}^{+00} \ H_{33}^{-00} \ H_{33}^{+00} \ H_{12}^{-00} \ H_{12}^{+00} \ H_{13}^{00} \ H_{23}^{00}]^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}^{01} = [H_{11}^{-01} \ H_{11}^{+01} \ H_{33}^{-01} \ H_{33}^{+01} \ H_{13}^{01}]^T,$$

$$\mathbf{H}^{10} = [H_{22}^{-10} \ H_{22}^{+10} \ H_{33}^{-10} \ H_{33}^{+10} \ H_{23}^{10}]^T, \quad \mathbf{H}^{11} = [H_{33}^{-11} \ H_{33}^{+11}]^T,$$

где S_{ij}^k — компоненты симметричного тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа k -го слоя.

Вводя распределения перемещений и деформаций по толщине оболочки (3), (5), (15) и конечно-элементные аппроксимации (16), (17), (19) в смешанный вариационный принцип Ху—Васидзу [18] и применяя стандартную процедуру смешанной модели МКЭ, приходим к следующим уравнениям равновесия элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T (\mathbf{V}^{r_1 r_2} + \mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}^{r_1 r_2} = (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (20)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{V}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{R}^{r_1 r_2} \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} = p^A \mathbf{G}^A (\mathbf{V}).$$

Здесь $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T$ — столбец узловых перемещений элемента размером 28×1 ; $\mathbf{V}^{r_1 r_2}$ — постоянные внутри элемента матрицы размером 10×28 , характеризующие линейные составляющие тензора деформаций Грина—Лагранжа (6); $\mathbf{R}^{r_1 r_2}$ — постоянные внутри элемента трехмерные массивы размером $10 \times 28 \times 28$, характеризующие нелинейные составляющие

тензора деформаций Грина—Лагранжа (6) (при этом произведение $\mathbf{R}^{\eta_2} \mathbf{V}$ образует матрицу размером 10×28); p^A — давление, распределенное по одной из внешних поверхностей Ω^A , поэтому суммирование по индексу A в последнем уравнении (20) не требуется; $\mathbf{G}^A(\mathbf{V})$ — столбец размером 28×1 , первоначально зависящий от узловых значений нормали $n_{i\nu}^A$ к внешней поверхности деформированной оболочки, в конечном итоге с учетом соотношений (7), (13), (14), (16) — от узловых перемещений $u_{i\nu}^A$; \mathbf{D} — матрица коэффициентов упругости слоистого композита, элементы которой определяются по формулам

$$D_{ijlm}^{s_1 s_2} = \sum_k \int_{h_k} C_{ijlm}^k (N^-)^{2-s_1-s_2} (N^+)^{s_1+s_2} d\theta_3 \quad (s_1, s_2 = 0, 1), \quad (21)$$

$$D_{\alpha 3\beta 3} = D_{\alpha 3\beta 3}^{00} + 2D_{\alpha 3\beta 3}^{01} + D_{\alpha 3\beta 3}^{11},$$

где C_{ijlm}^k — жесткости k -го слоя.

Отметим, что система уравнений (20) получена в предположении, что метрики внешних поверхностей оболочки эквивалентны метрике срединной поверхности; было также использовано аналитическое интегрирование [6—9], что является прерогативой геометрически точного элемента оболочки.

Для решения нелинейной системы (20) воспользуемся инкрементальным подходом. Рассмотрим два деформированных состояния оболочки (необязательно близких друг к другу) и снабдим верхним левым индексом t величины, характеризующие предыдущее состояние оболочки, в то время как величины с индексом $t + \Delta t$ будем относить к последующему состоянию, т.е. имеем

$${}^{t+\Delta t} p^A = {}^t p^A + \Delta p^A, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{V} = {}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}, \quad (22)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{E}^{\eta_2} = {}^t \mathbf{E}^{\eta_2} + \Delta \mathbf{E}^{\eta_2}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{H}^{\eta_2} = {}^t \mathbf{H}^{\eta_2} + \Delta \mathbf{H}^{\eta_2},$$

где Δp^A , $\Delta \mathbf{V}$, $\Delta \mathbf{E}^{\eta_2}$, $\Delta \mathbf{H}^{\eta_2}$ — инкрементальные переменные.

Введем формулы (22) в уравнения (20) и, полагая, что последние удовлетворяются для “момента времени” t , приходим к инкрементальной форме уравнений равновесия конечного элемента оболочки под действием следящего давления:

$$\Delta \mathbf{E}^{\eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T (\mathbf{B}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} {}^t \mathbf{V} + \mathbf{R}^{\eta_2} \Delta \mathbf{V}) \Delta \mathbf{V},$$

$$\Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2}, \quad (23)$$

$$\sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} \{ 2(\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} + [\mathbf{B}^{\eta_1 \eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V})]^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} \} =$$

$$= ({}^t p^A + \Delta p^A) \mathbf{G}^A ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) - {}^t p^A \mathbf{G}^A ({}^t \mathbf{V}).$$

Решение инкрементальных уравнений (23) получим с помощью метода Ньютона—Рафсона, представив итерационный процесс в виде

$$\Delta \mathbf{V}^{[n+1]} = \Delta \mathbf{V}^{[n]} + \Delta \hat{\mathbf{V}}^{[n]}, \quad \Delta \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2 [n+1]} = \Delta \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2 [n]} + \Delta \hat{\mathbf{E}}^{\eta_1 \eta_2 [n]}, \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2 [n+1]} = \Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2 [n]} + \Delta \hat{\mathbf{H}}^{\eta_1 \eta_2 [n]} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Подставляя соотношения (24) в уравнения (23), линеаризуя полученные уравнения и исключая инкрементальные деформации $\Delta \hat{\mathbf{E}}^{\eta_1 \eta_2 [n]}$ и инкрементальные результирующие напряжений $\Delta \hat{\mathbf{H}}^{\eta_1 \eta_2 [n]}$, приходим к разрешающей системе уравнений МКЭ

$$\mathbf{K} \Delta \hat{\mathbf{V}}^{[n]} = \Delta \mathbf{F}^{[n]}, \quad (25)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_L$ — тангенциальная матрица жесткости элемента оболочки и $\Delta \mathbf{F}^{[n]}$ — столбец правых частей, которые вычисляем как

$$\mathbf{K}_D = \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} ({}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]})^T \mathbf{D}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]},$$

$$\mathbf{K}_H = 2 \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} + \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2 [n]}) \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2},$$

$$\mathbf{K}_L = -({}^t p^A + \Delta p^A) \frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial \mathbf{V}} ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}), \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{F}^{[n]} = - \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} [({}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]})^T \mathbf{D}^{\eta_1 \eta_2} ({}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]} - \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{V}^{[n]}) +$$

$$+ 2(\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2}) \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2}] \Delta \mathbf{V}^{[n]} + ({}^t p^A + \Delta p^A) \mathbf{G}^A ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}) - {}^t p^A \mathbf{G}^A ({}^t \mathbf{V}),$$

$${}^t\mathbf{L}^{\eta_2[n]} = \mathbf{B}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} ({}^t\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}^{[n]}), \mathbf{D}^{\eta_2} = \mathbf{Q}^{\eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T.$$

Замечание. Матрицы жесткости \mathbf{K}_D и \mathbf{K}_H — симметричные. Симметрия второй матрицы устанавливается путем использования результатов работы [9]. Однако матрица жесткости \mathbf{K}_L , отвечающая действию следящего нагружения, в общем случае является несимметричной [1, 19], поэтому решение системы линейных алгебраических уравнений (25), (26) осуществляется модифицированным методом Гаусса для ленточных матриц [1]. Отметим также, что инкрементальные результирующие напряжений на n -ом шаге итерационного процесса вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{\eta_2} \Delta \mathbf{H}^{\eta_2[n]} = & \mathbf{D}^{\eta_2} \{ [\mathbf{B}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} ({}^t\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}^{[n-1]})] \Delta\mathbf{V}^{[n]} - \\ & - (\mathbf{R}^{\eta_2} \Delta\mathbf{V}^{[n-1]}) \Delta\mathbf{V}^{[n-1]} \}, \Delta\mathbf{V}^{[0]} = \mathbf{0}, \Delta \mathbf{H}^{\eta_2[0]} = \mathbf{0}, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\|\mathbf{U}^{[n+1]} - \mathbf{U}^{[n]}\| < \varepsilon \|\mathbf{U}^{[n]}\|, \quad (27)$$

где \mathbf{U} — глобальный вектор узловых перемещений; $\|\dots\|$ — евклидова норма в пространстве перемещений; ε — априори заданная точность вычислений.

Численные результаты

В качестве первого примера рассмотрим изотропное кольцо (рис. 2) ($E = 2,1 \cdot 10^7$, $\nu = 0,3$) и двухслойное композитное кольцо ($E_L = 2,5 \cdot 10^7$, $E_T = 10^6$, $G_{LT} = 5 \cdot 10^5$, $G_{TT} = 2 \cdot 10^5$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25$) под действием неравно-

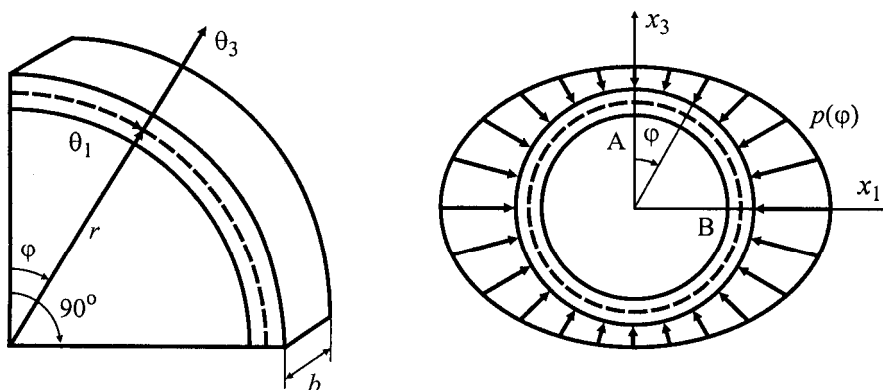


Рис. 2. Кольцо под действием следящей нагрузки.

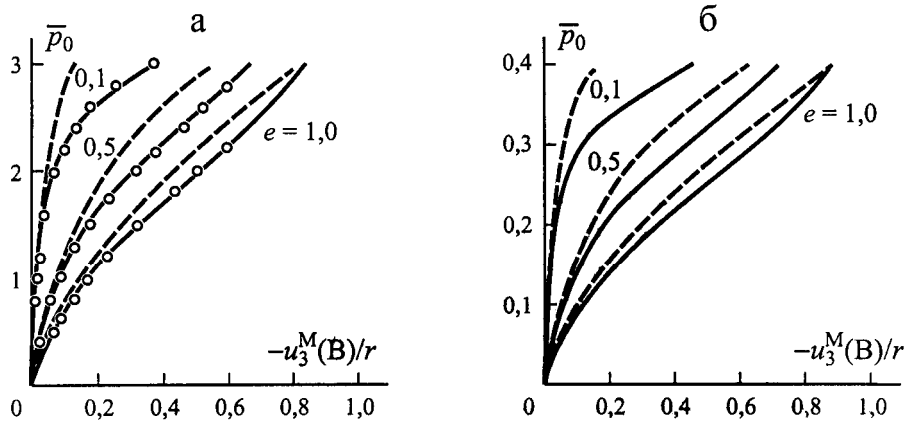


Рис. 3. Зависимость нагрузки от прогиба с учетом (—) и без учета (---) следящего нагружения для однородного кольца (а) и двухслойного композитного кольца (б). (О) — данные [19], полученные на основе аналитического решения задачи изгиба изотропного кольца [20].

мерно распределенного следящего давления $p(\varphi) = p_0(1 - e \cos 2\varphi)$. Геометрические параметры для обоих колец выбираем следующими: $r = 100, h = 1, b = 20$. Индексы L и T соответствуют направлению армирования композитного материала и поперечному направлению. Толщины слоев композитного кольца приняты одинаковыми, т.е. $h_1 = h_2 = 0,5$, а направления армирования во внутреннем и внешнем слоях совпадают с окружным и продольным направлениями соответственно.

Вследствие симметрии задачи рассмотрим четверть кольца и будем использовать равномерные конечно-элементные 18×1 сетки. Расчеты выполнены с помощью разработанных геометрически точных билинейных элементов оболочки GEX7P4F и GEX7P4 с учетом и без учета следящего нагружения, которые дополнительно позволяют моделировать плоское напряженное состояние. На рис. 3 показаны кривые нагрузка—прогиб при разных значениях эксцентриситета e . В качестве безразмерного параметра нагружения выбраны $\bar{p}_0 = 12p_0r^3/Ebh^3$ — для однородного кольца и $\bar{p}_0 = 12p_0r^3/E_Lbh^3$ — для композитного. Точками представлены данные работы [19], полученные на основе аналитического решения задачи изгиба

Табл. 1

Поперечное перемещение $\bar{u}_3 = u_3^M/r$ в точках А и В однородного кольца при $e = 1$ и $\bar{p}_0 = 3$

Элемент	NStep = 1			NStep = 5			NStep = 10		
	$\bar{u}_3(A)$	$-\bar{u}_3(B)$	NIter	$\bar{u}_3(A)$	$-\bar{u}_3(B)$	NIter	$\bar{u}_3(A)$	$-\bar{u}_3(B)$	NIter
GEX7P4F	0,3660	0,8407	7	0,3660	0,8407	25	0,3660	0,8407	50
GEX7P4	0,3554	0,8220	6	0,3554	0,8220	18	0,3554	0,8220	30

Табл. 2

Поперечное перемещение $\bar{u}_3 = u_3^M / r$ в точках А и В двухслойного композитного кольца при $e = 1$ и $\bar{p}_0 = 0,4$

Элемент	NStep = 1			NStep = 5			NStep = 10		
	\bar{u}_3 (А)	$-\bar{u}_3$ (В)	NIter	\bar{u}_3 (А)	$-\bar{u}_3$ (В)	NIter	\bar{u}_3 (А)	$-\bar{u}_3$ (В)	NIter
GEX7P4F	0,3647	0,8798	7	0,3647	0,8798	24	0,3647	0,8798	50
GEX7P4	0,3529	0,8831	6	0,3529	0,8831	18	0,3529	0,8831	30

изотропного кольца [20]. Как видим, результаты расчета с учетом и без учета следящего давления существенно различаются при больших прогибах и малых значениях эксцентриситета. В табл. 1 и 2 приведены значения поперечного перемещения u_3^M в точках А и В путем использования разного числа шагов по нагрузке NStep и показано полное число итераций NIter, необходимых для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-6}$ согласно критерию сходимости (27). Отметим два важных результата: во-первых, решение задач изгиба изотропного и композитного колец под действием следящего давления возможно *без привлечения* инкрементального подхода (NStep = 1), на что потребовалось всего семь итераций и, во-вторых, число шагов по нагрузке *не оказывает влияния* на расчетные значения перемещений, что свидетельствует об эффективности построенных геометрически точных элементов оболочки.

Рассмотрим далее четырехслойную перекрестно армированную резинокордную торообразную оболочку кругового поперечного сечения, нагруженную равномерно распределенным по внутренней поверхности давлением p_0 (рис. 4). С помощью этой оболочки будем моделировать диагональную шину. Исходные характеристики элементарных резинокордных слоев вы-

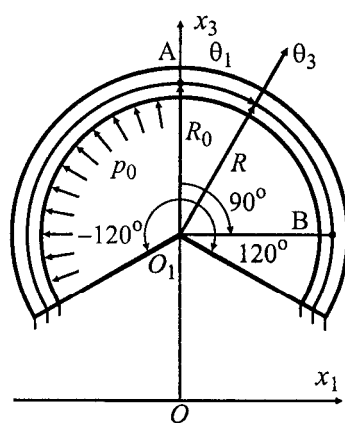


Рис. 4. Схема перекрестно армированной резинокордной торообразной оболочки.

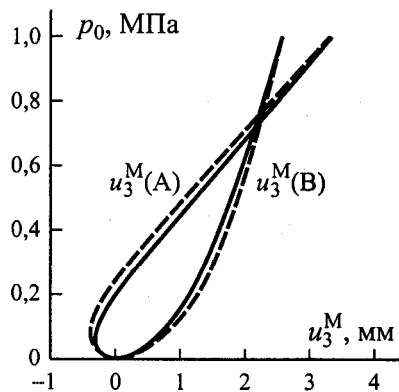


Рис. 5. Зависимость нагрузки от прогиба с учетом (—) и без учета (- -) следящего нагружения для резинокордной торообразной оболочки.

бираем следующими [21]: $E_L = 510,45$ МПа, $E_T = 6,91$ МПа, $G_{LT} = 2,33$ МПа, $G_{TT} = 1,77$ МПа, $\nu_{LT} = 0,46$. Пусть толщина оболочки $h = 4,8$ мм, толщина резинокордного слоя $h_k = 1,2$ мм, ориентация резинокордных слоев $\gamma_k = (-1)^{k-1}\gamma$, где $\gamma = 45^\circ$ и $k = \overline{1, 4}$. В качестве отсчетной поверхности примем срединную поверхность оболочки, которая образована вращением части окружности радиусом $R = 50$ мм. Расстояние от оси вращения до экватора срединной поверхности $R_0 = 250$ мм. Будем также предполагать, что сечения оболочки с координатами $\pm 120^\circ$ жестко защемлены.

Результаты расчета шины на действие следящего и консервативного нагружений получены с помощью регулярных конечно-элементных 24×1 сеток при $\epsilon = 10^{-6}$ и показаны в табл. 3 и на рис. 5. Как видим, данные из табл. 1 и табл. 3 качественно согласуются друг с другом. В частности, решение и этой задачи для диагональной шины может быть найдено без привлечения инкрементального подхода. Здесь, однако, влияние следящего нагружения прослеживается не столь заметно (см. рис. 3 и 5).

В последующей работе авторы намерены обобщить полученные результаты и использовать их для расчета резинокордной оболочки вращения при наличии односторонних ограничений.

Табл. 3

Поперечное перемещение u_3^M (мм) в точках А и В перекрестно армированной резинокордной торообразной оболочки при $p_0 = 1$ МПа

Элемент	NStep = 1			NStep = 5			NStep = 10		
	u_3^M (А)	u_3^M (В)	NIter	u_3^M (А)	u_3^M (В)	NIter	u_3^M (А)	u_3^M (В)	NIter
ГЕХ7Р4F	3,3409	2,5721	5	3,3409	2,5721	20	3,3409	2,5721	40
ГЕХ7Р4	3,3057	2,5649	5	3,3057	2,5649	16	3,3057	2,5649	31

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00373) и Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/660).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.* The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics. — Oxford: Butterworth Heinemann, 2000. — 463 p.
2. *Faria L. O., Oden J. T., Yavary B., Tworzydło W. W., Bass J. M., and Becker E. B.* Tire modeling by finite elements // *Tire Sci. Technology*. — 1992. — Vol. 20, No. 1. — P. 33—56.
3. *Danielson K. T., Noor A. K., and Green J. S.* Computational strategies for tire modeling and analysis // *Comput. Struct.* — 1996. — Vol. 61, No. 4. — P. 673—693.
4. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка // *Механика композит. материалов*. — 2002. — Т. 38, № 6. — С. 815—826.
5. *Куликов Г. М.* Деформационные соотношения, точно представляющие большие перемещения оболочки как жесткого тела // *Механика твердого тела*. — 2004. — Т. 39, № 5. — С. 130—140.
6. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part II. Enhanced finite element technique // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2006. — Vol. 195, No. 19—22. — P. 2209—2230.
7. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Geometrically exact assumed stress-strain multilayered solid-shell elements based on the 3D analytical integration // *Comput. Struct.* — 2006. — Vol. 84, No. 19—20. — P. 1275—1287.
8. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part III. Analysis of TM shells with constraints // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2007. — Vol. 196, No. 7. — P. 1203—1215.
9. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom // *Comput. Model. Eng. Sci.* — 2008. — Vol. 28, No. 1. — P. 15—38.
10. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Осесимметричная деформация анизотропных слоистых оболочек вращения сложной формы // *Механика композит. материалов*. — 1981. — № 4. — С. 637—645.
11. *Roh H. Y. and Cho M.* The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2004. — Vol. 193, No. 23—26. — P. 2261—2299.
12. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Non-linear geometrically exact assumed stress-strain four-node solid-shell element with high coarse-mesh accuracy // *Finite Elem. Anal. Des.* — 2007. — Vol. 43, No. 6—7. — P. 425—443.
13. *Parisich H.* A continuum-based shell theory for non-linear applications // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1995. — Vol. 38, No. 11. — P. 1855—1883.
14. *Bischoff M., Wall W. A., Bletzinger K. U., and Ramm E.* Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures / *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Vol. 2: Solids and Structures / Eds by E. Stein, R. de Borst, T. J. R. Hughes. — Wiley, 2004. — P. 59—137.

15. *Kulikov G. M.* Refined global approximation theory of multilayered plates and shells // *J. Eng. Mech.* — 2001. — Vol. 127, No. 2. — P. 119—125.
16. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
17. *Pian T. H. H.* State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method // *Finite Elem. Anal. Des.* — 1995. — Vol. 21, No. 1. — P. 5—20.
18. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
19. *Argyris J. H. and Symeonidis S.* Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading — natural formulation. Part I. Quasistatic problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1981. — Vol. 26, No. 1. — P. 75—123.
20. *Seide P. and Jamjoom T. M. M.* Large deformations of circular rings under nonuniform normal pressure // *J. Appl. Mech.* — 1974. — Vol. 41, No. 1. — P. 192—196.
21. *Kulikov G. M.* Computational models for multilayered composite shells with application to tires // *Tire Sci. Technology.* — 1996. — Vol. 24, No. 1. — P. 11—38.

Поступила в редакцию 20.01.2009
Received Jan. 20, 2009
