

*Г. М. Куликов\**, *С. В. Плотникова*

*Тамбовский государственный технический университет, Россия*

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОМПОЗИТНЫХ  
ОБОЛОЧЕК С ЖЕСТКИМ ВЫПУКЛЫМ ОСНОВАНИЕМ,  
ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ СЛЕДЯЩИХ НАГРУЗОК**

*G. M. Kulikov\** and *S. V. Plotnikova*

**CONTACT INTERACTION OF COMPOSITE SHELLS SUBJECTED  
TO FOLLOWER LOADS, WITH RIGID CONVEX FOUNDATION**

**Keywords:** multilayered composite shell, follower load, contact problem, tire, geometrically exact shell element, 7-parameter shell model

Based on a 7-parameter shell model, a numerical algorithm is developed for solving the contact problem for a multilayered composite shell lying on a rigid convex foundation, which is subjected to a follower pressure and undergoes arbitrarily large rotations. A new geometrically exact solid shell element is formulated, which permits one to solve the nonlinear deformation problem for thin-walled composite structures under unilateral contact constraints by using a small number of load steps. The calculation of a homogeneous ring and an angle-ply toroidal shell interacting with plane and cylindrical foundations is considered.

**Ключевые слова:** оболочка композитная многослойная, нагрузка следящая, задача контактная, шина, элемент оболочки геометрически точный, модель оболочки 7-параметрическая

Разработан алгоритм численного решения задачи контактного взаимодействия многослойной композитной оболочки, нагруженной следящим давлением и подверженной произвольно большому поворотам, с жестким выпуклым основанием на основе 7-параметрической модели оболочек. Построен новый геометрически точный трехмерный элемент оболочки, который позволяет решать задачу нелинейного деформирования тонкостенных композитных конструкций при наличии односторонних контактных ограничений за малое число шагов по нагрузке. Рассмотрен расчет однородного кольца и перекрестно армированной торообразной оболочки, взаимодействующих с плоским и цилиндрическим основаниями.

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [kulikov@apmath.tstu.ru](mailto:kulikov@apmath.tstu.ru)  
Corresponding author: [kulikov@apmath.tstu.ru](mailto:kulikov@apmath.tstu.ru)

## Введение

В последние годы значительный прогресс был достигнут в решении геометрически нелинейных задач для оболочек при наличии контактных ограничений [1—6] на основе модифицированного метода множителей Лагранжа с регуляризацией [7]. При этом в работах [1—3] использованы изопараметрические конечные элементы, а в работах [4—6] — геометрически точные элементы оболочки на основе 6-параметрической модели, в которой деформационные соотношения точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных координатах отсчетной поверхности. Термин “геометрически точный элемент оболочки” означает, что отсчетная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями и векторы перемещений внешних поверхностей представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью. Недостатком 6-параметрической модели многослойных оболочек является то, что поперечные нормальные деформации распределены равномерно по толщине пакета слоев, что приводит к пуассоновскому запираению, т.е. к искусственному завышению жесткости элемента оболочки в поперечном направлении. Альтернативой является 7-параметрическая пространственная модель оболочки [8, 9], свободная от указанного недостатка.

В настоящей работе представлен новый алгоритм численного решения геометрически нелинейной контактной задачи для многослойных композитных оболочек под действием следящего нагружения на основе 7-параметрической модели оболочки. В данном алгоритме значение узловой контактной силы по направлению нормали к ограничивающей поверхности связывается с множителем Лагранжа  $\lambda$  посредством формулы  $\lambda |\text{grad } \Psi|$ , где  $\Psi$  — функция непроникания контактирующих тел. Это позволяет использовать достаточно большие шаги по нагрузке, исходя из геометрически точного элемента оболочки [9]. Отметим, что в работах [1—5] множитель Лагранжа устанавливался равным контактному давлению для всех узлов, вступающих в контакт с жестким основанием, что является общепринятым в механике контактных взаимодействий. Однако это обстоятельство нередко приводит к неэффективным вычислениям при расчете тонкостенных конструкций, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам.

### Формулировка контактной задачи для композитной оболочки

Рассмотрим тонкую оболочку толщиной  $h = d^- + d^+$ , составленную из  $NL$  упругих анизотропных слоев постоянной толщины  $h_k$ . Будем полагать, что в каждой точке оболочки существует поверхность упругой симметрии, параллельная отсчетной поверхности  $\Omega$ . В качестве отсчетной поверхности примем внутреннюю поверхность какого-либо  $k$ -слоя или поверхность раздела слоев, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную ко-

ординату  $\theta_3$  будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности  $\Omega$  (рис. 1). Пусть  $e_1$  и  $e_2$  — единичные векторы касательных к координатным линиям  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ;  $e_3$  — единичный вектор внешней нормали;  $A_\alpha$  — параметры Ламе;  $k_\alpha$  — главные кривизны;  $d^A$  — расстояния от отсчетной поверхности до внешних поверхностей  $\Omega^A$ ;  $r(\theta_1, \theta_2)$  — радиус-вектор отсчетной поверхности  $\Omega$ ;  $R^M(\theta_1, \theta_2)$  — радиус-вектор срединной поверхности  $\Omega^M$ ;  $R^A(\theta_1, \theta_2)$  — радиус-векторы внешних поверхностей  $\Omega^A$ . Здесь и далее  $k = 1, 2, \dots, NL$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $A = -, +$ .

Предположим для определенности, что контактное взаимодействие оболочки осуществляется лишь с одним абсолютно жестким телом без учета трения в области контакта. Пусть граница неподвижного выпуклого тела  $\Omega_b$  является достаточно гладкой и описывается уравнением

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0, \tag{1}$$

где  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{k}_i$  — радиус-вектор поверхности  $\Omega_b$ . Для множества точек, лежащих вне жесткого тела, справедливо неравенство

$$\Psi(\mathbf{x}) > 0. \tag{2}$$

Условия (1), (2) можно трактовать как условия непроникания оболочки и жесткого тела. Эти условия выражают тот факт, что два контактирующих тела должны оставаться в контакте согласно условию (1) или быть разделены в соответствии с неравенством (2).

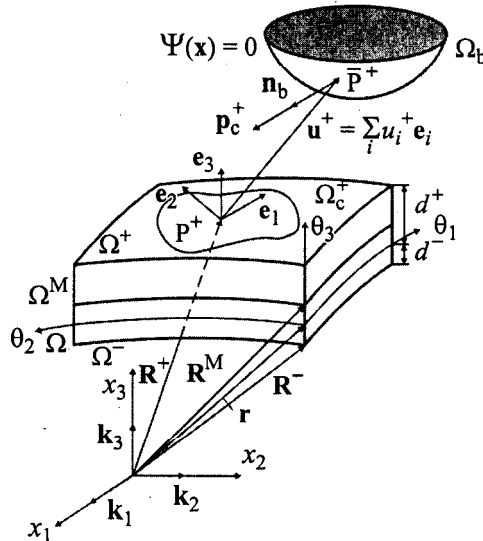


Рис. 1. Контактное взаимодействие оболочки с жестким выпуклым телом.

Будем полагать для простоты, что на нижней поверхности  $\Omega^-$  контактного взаимодействия не происходит, а поверхность  $\Omega^+$  состоит из двух частей:  $\Omega^+ = \Omega_f^+ \cup \Omega_c^+$ , где  $\Omega_f^+$  — часть поверхности с заданными внешними поверхностными нагрузками;  $\Omega_c^+$  — часть поверхности, где ожидается контактное взаимодействие. В этом случае условие неотрицательности контактного давления представим в виде

$$p_c^+ = -\mathbf{p}_c^+ \cdot \mathbf{n}_b \leq 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}_b$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Omega_b$  (см. рис. 1).

Условия (1)—(3) могут быть записаны с помощью одного уравнения

$$p_c^+(\mathbf{R}^+) \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) = 0, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{R}^+ + \mathbf{u}^+ = \sum_i \bar{R}_i^+ \mathbf{k}_i, \quad \bar{R}_i^+ = r_i + d^+ t_{3i} + \sum_j t_{ji} u_j^+, \quad (5)$$

где  $r_i(\theta_1, \theta_2)$  — компоненты радиус-вектора отсчетной поверхности;  $u_i^+(\theta_1, \theta_2)$  — компоненты вектора перемещений внешней поверхности;  $t_{ij}(\theta_1, \theta_2)$  — элементы матрицы перехода от базиса декартовой системы координат  $\mathbf{k}_i$  к локальному базису  $\mathbf{e}_i$ ;  $\bar{R}_i^+(\theta_1, \theta_2)$  — компоненты радиус-вектора внешней поверхности деформированной оболочки. Условие (4) выражает тот факт, что контактные силы определяются лишь в тех точках оболочки, в которых осуществляется контактное взаимодействие с жестким основанием.

Чтобы ввести контактные ограничения (4) в вариационную формулировку задачи, рассмотрим модифицированный функционал Ху—Васидзу

$$J_{PL} = J_{HW} + \iint_{\Omega_c^+} \left[ \lambda \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) - \frac{\lambda^2}{2\epsilon} \right] d\Omega, \quad (6)$$

где  $J_{HW}$  — функционал Ху—Васидзу [4, 6];  $\lambda(\mathbf{R}^+)$  — множитель Лагранжа;  $\epsilon$  — положительный штрафной параметр, который введен с целью регуляризации задачи. В случае  $\epsilon \rightarrow \infty$  приходим к стандартной формулировке задачи контактного взаимодействия оболочки с жестким основанием [3]. Отметим, что функционал  $J_{PL}$  нередко называют возмущенным лагранжианом [7].

Условие стационарности функционала (6) приводит к следующему вариационному уравнению:

$$\delta J_{HW} + \delta J_c = 0, \quad (7)$$

$$\delta J_c = \iint_{\Omega_c^+} \left\{ \lambda \delta \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) + \delta \lambda \left[ \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) - \frac{1}{\epsilon} \lambda \right] \right\} d\Omega, \quad (8)$$

откуда, учитывая результаты [6], следует фундаментальная формула, связывающая контактное давление с множителем Лагранжа:

$$p_c^+ = \lambda(\mathbf{R}^+) \left| \text{grad } \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) \right|. \quad (9)$$

Перемещения и компоненты тензора деформаций Грина—Лагранжа 7-параметрической модели многослойных оболочек [9] распределены по толщине пакета слоев согласно формулам

$$u_\alpha = \sum_A N^A u_\alpha^A, \quad u_3 = \sum_I L^I u_3^I \quad (I = -, M, +), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_A N^A \varepsilon_{\alpha\beta}^A, \quad \varepsilon_{33} = \sum_A N^A \varepsilon_{33}^A, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}, \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha 3}^- + \varepsilon_{\alpha 3}^+), \quad (11)$$

где  $u_i^A(\theta_1, \theta_2)$  — тангенциальные и поперечное перемещения внешних поверхностей;  $u_3^M(\theta_1, \theta_2)$  — поперечное перемещение срединной поверхности;  $\varepsilon_{ij}^A(\theta_1, \theta_2)$  — деформации внешних поверхностей [9];  $N^A(\theta_3)$  и  $L^I(\theta_3)$  — многочлены Лагранжа первой и второй степени. Отметим, что деформационные соотношения (11) точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела и позволяют преодолеть пуассоновское закливание элемента оболочки в поперечном направлении [8].

### Геометрически точный гибридный билинейный элемент композитной оболочки при наличии односторонних ограничений

В работе [9] построен геометрически точный 7-параметрический билинейный элемент композитной оболочки под действием следящей нагрузки, основанный на введении независимых от перемещений деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{AS} = \sum_A N^A E_{\alpha\beta}^A, \quad \varepsilon_{33}^{AS} = \sum_A N^A E_{33}^A, \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{AS} = E_{\alpha 3}^A, \quad (12)$$

где  $E_{\alpha\beta}^A(\theta_1, \theta_2)$ ,  $E_{33}^A(\theta_1, \theta_2)$ ,  $E_{\alpha 3}^A(\theta_1, \theta_2)$  — независимо введенные деформации внешних поверхностей оболочки. Как видим, законы распределения

зависимых и не зависимых от перемещений деформаций (11), (12) согласованы друг с другом.

Известно, что при построении гибридного элемента оболочки вводятся функциональные переменные разного типа, поэтому для них на каждом конечном элементе надлежит использовать независимые аппроксимации. Для перемещений воспользуемся стандартной билинейной аппроксимацией

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = [u_1^- \ u_2^- \ u_3^- \ u_1^+ \ u_2^+ \ u_3^+ \ u_3^M]^T, \quad \mathbf{v}_r = [u_{1r}^- \ u_{2r}^- \ u_{3r}^- \ u_{1r}^+ \ u_{2r}^+ \ u_{3r}^+ \ u_{3r}^M]^T,$$

где  $\mathbf{v}_r$  — столбцы узловых перемещений;  $N_r(\xi_1, \xi_2)$  — билинейные функции формы;  $\xi_\alpha = (\theta_\alpha - d_\alpha^{\text{el}})/l_\alpha^{\text{el}}$  — нормализованные криволинейные координаты элемента;  $d_\alpha^{\text{el}}$  — координаты центра элемента;  $2l_\alpha^{\text{el}}$  — длины сторон элемента. Здесь и далее индекс  $r = \overline{1, 4}$ .

Для независимо введенных деформаций (12) имеем еще более простые аппроксимации

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2},$$

$$\mathbf{E} = [E_{11}^- \ E_{11}^+ \ E_{22}^- \ E_{22}^+ \ E_{33}^- \ E_{33}^+ \ 2E_{12}^- \ 2E_{12}^+ \ 2E_{13} \ 2E_{23}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{00} = [E_{11}^{-00} \ E_{11}^{+00} \ E_{22}^{-00} \ E_{22}^{+00} \ E_{33}^{-00} \ E_{33}^{+00} \ 2E_{12}^{-00} \ 2E_{12}^{+00} \ 2E_{13}^{00} \ 2E_{23}^{00}]^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{E}^{01} = [E_{11}^{-01} \ E_{11}^{+01} \ E_{33}^{-01} \ E_{33}^{+01} \ 2E_{13}^{01}]^T,$$

$$\mathbf{E}^{10} = [E_{22}^{-10} \ E_{22}^{+10} \ E_{33}^{-10} \ E_{33}^{+10} \ 2E_{23}^{10}]^T, \quad \mathbf{E}^{11} = [E_{33}^{-11} \ E_{33}^{+11}]^T,$$

где  $\mathbf{E}^{r_1 r_2}$  — постоянные внутри элемента столбцы;  $\mathbf{Q}^{00}$  — единичная матрица размером  $10 \times 10$ ;  $\mathbf{Q}^{01}, \mathbf{Q}^{10}$  — матрицы размером  $10 \times 5$ ;  $\mathbf{Q}^{11}$  — матрица размером  $10 \times 2$ , введенные в работе [9] с целью более компактной записи разрешающих матричных уравнений. Здесь и далее  $r_1, r_2 = 0, 1$ . Для результирующих напряжений [9] примем аналогичную аппроксимацию

$$\mathbf{H} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2},$$

$$\mathbf{H} = [H_{11}^- \ H_{11}^+ \ H_{22}^- \ H_{22}^+ \ H_{33}^- \ H_{33}^+ \ H_{12}^- \ H_{12}^+ \ H_{13} \ H_{23}]^T,$$

$$\mathbf{H}^{00} = [H_{11}^{-00} \ H_{11}^{+00} \ H_{22}^{-00} \ H_{22}^{+00} \ H_{33}^{-00} \ H_{33}^{+00} \ H_{12}^{-00} \ H_{12}^{+00} \ H_{13}^{00} \ H_{23}^{00}]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^{01} = [H_{11}^{-01} \ H_{11}^{+01} \ H_{33}^{-01} \ H_{33}^{+01} \ H_{13}^{01}]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^{10} = [H_{22}^{-10} \ H_{22}^{+10} \ H_{33}^{-10} \ H_{33}^{+10} \ H_{23}^{10}]^T, \quad \mathbf{H}^{11} = [H_{33}^{-11} \ H_{33}^{+11}]^T,$$

где  $\mathbf{H}^{i/j}$  — постоянные внутри элемента столбцы.

В связи с тем что в формулах для компонент тензора деформаций Грина—Лагранжа сохранены все малые члены (см. уравнения (6), (7) работы [9]), деформации внешних поверхностей оболочки изменяются внутри конечного элемента согласно квадратичному закону

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{s_1, s_2} (\xi_1)^{s_1} (\xi_2)^{s_2} \boldsymbol{\varepsilon}^{s_1 s_2},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{s_1 s_2} = (\mathbf{B}^{s_1 s_2} + \mathbf{A}^{s_1 s_2} \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad \mathbf{B}^{s_1 s_2} = \mathbf{0} \text{ при } s_1 = 2 \text{ или } s_2 = 2, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}^- \ \varepsilon_{11}^+ \ \varepsilon_{22}^- \ \varepsilon_{22}^+ \ \varepsilon_{33}^- \ \varepsilon_{33}^+ \ 2\varepsilon_{12}^- \ 2\varepsilon_{12}^+ \ 2\varepsilon_{13}^- \ 2\varepsilon_{13}^+]^T,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{s_1 s_2} = [\varepsilon_{11}^{-s_1 s_2} \ \varepsilon_{11}^{+s_1 s_2} \ \varepsilon_{22}^{-s_1 s_2} \ \varepsilon_{22}^{+s_1 s_2} \ \varepsilon_{33}^{-s_1 s_2} \ \varepsilon_{33}^{+s_1 s_2} \ 2\varepsilon_{12}^{-s_1 s_2} \ 2\varepsilon_{12}^{+s_1 s_2} \ 2\varepsilon_{13}^{-s_1 s_2} \ 2\varepsilon_{13}^{+s_1 s_2}]^T.$$

Здесь  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T$  — столбец узловых перемещений элемента размером  $28 \times 1$ ;  $\mathbf{B}^{s_1 s_2}$  — постоянные внутри элемента матрицы размером  $10 \times 28$ , отвечающие учету линейных составляющих тензора деформаций Грина—Лагранжа;  $\mathbf{A}^{s_1 s_2}$  — постоянные внутри элемента трехмерные массивы размером  $10 \times 28 \times 28$ , отвечающие учету нелинейных составляющих тензора деформаций Грина—Лагранжа. При этом произведение  $\mathbf{A}^{s_1 s_2} \mathbf{V}$  образует матрицу размером  $10 \times 28$ , где  $s_1, s_2 = 0, 1, 2$ .

В случае редких конечно-элементных сеток характеристики геометрически точного билинейного элемента оболочки можно улучшить, применяя метод введенных локальных деформаций (ANS метод), получивший в последние годы широкое распространение в литературе по методу конечного элемента [10, 11]. Заметим, что в настоящей статье ANS метод используется в нетрадиционной формулировке, так как предполагается, что деформации внешних поверхностей оболочки изменяются внутри элемента не по квадратичному (16), а по билинейному закону

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ANS}} = \sum_r N_r \boldsymbol{\varepsilon}(P_r), \quad (17)$$

где  $P_r$  — узлы элемента. Аппроксимацию (17) удобно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ANS}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{00} + \boldsymbol{\varepsilon}^{02} + \boldsymbol{\varepsilon}^{20} + \boldsymbol{\varepsilon}^{22} + \xi_1(\boldsymbol{\varepsilon}^{10} + \boldsymbol{\varepsilon}^{12}) + \xi_2(\boldsymbol{\varepsilon}^{01} + \boldsymbol{\varepsilon}^{21}) + \xi_1 \xi_2 \boldsymbol{\varepsilon}^{11} \quad (18)$$

Интеграл (8) вычисляем с использованием билинейной аппроксимации для подынтегральной функции. После интегрирования по переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$  приходим к формуле

$$\delta J_c = \sum_r \mu_r^+ \left[ \delta \mathbf{v}_r^T \lambda_r \Phi_r + \delta \lambda_r \left( \Psi_r - \frac{1}{\epsilon} \lambda_r \right) \right], \quad (19)$$

где

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{1r}^+} & \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{2r}^+} & \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{3r}^+} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (20)$$

$$\Psi_r = \Psi(P_r), \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{ir}^+} = \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_i^+}(P_r), \quad \mu^+ = A_{1r}^+ A_{2r}^+ l_1^{\text{el}} l_2^{\text{el}}.$$

Здесь  $A_\alpha^+ = A_\alpha (1 + k_\alpha d^+)$  — параметры Ламе внешней поверхности  $\Omega^+$ . Эта схема позволяет исключить узловые значения множителя Лагранжа  $\lambda_r$  на элементном уровне. Необходимо отметить, что в работах [4, 5], в отличие от предлагаемого подхода, множитель Лагранжа аппроксимируется внутри элемента согласно билинейному закону. Как результат узловые значения множителя Лагранжа  $\lambda_r$  не исключаются на элементном уровне и при расчетах приходится решать систему линейных алгебраических уравнений, число которых меняется в процессе итерационного решения задачи.

Вводя распределения перемещений и деформаций по толщине оболочки (10)—(12) и конечно-элементные аппроксимации (13)—(15), (18) в смешанное вариационное уравнение (7) и учитывая (19), приходим к следующим уравнениям равновесия элемента

$$\mathbf{E}^{\eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T (\mathbf{B}^{\eta_2} + \mathbf{R}^{\eta_2} \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}^{\eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_2} \mathbf{E}^{\eta_2}, \quad (21)$$

$$\sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_2} \mathbf{H}^{\eta_2} + \Xi \mathbf{\Lambda} = \mathbf{F} + p^- \mathbf{G}^- (\mathbf{V}).$$

Здесь  $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4]^T$  — столбец узловых значений множителя Лагранжа;  $\mathbf{F}$  — столбец размером  $28 \times 1$ , отвечающий действию консервативного нагружения;  $p^-$  — следящее давление, распределенное по внутренней поверхности  $\Omega^-$ ;  $\mathbf{G}^- (\mathbf{V})$  — столбец размером  $28 \times 1$ , зависящий от узловых перемещений  $u_{ir}^-$  [9];  $\mathbf{D}$  — матрица коэффициентов упругости слоистого композита [9];  $\mathbf{R}^{\eta_2}$  — трехмерные массивы размером  $10 \times 28 \times 28$ ;  $\Xi$  — матрица размером  $28 \times 4$ , отвечающая контактному взаимодействию оболочки и жесткого основания:



$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{00} &= \mathbf{A}^{00} + \mathbf{A}^{02} + \mathbf{A}^{20} + \mathbf{A}^{22}, \quad \mathbf{R}^{01} = \mathbf{A}^{01} + \mathbf{A}^{21}, \\ \mathbf{R}^{10} &= \mathbf{A}^{10} + \mathbf{A}^{12}, \quad \mathbf{R}^{11} = \mathbf{A}^{11}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} \\ \mathbf{O}_{7 \times 1} & \Phi_2 & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} \\ \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \Phi_3 & \mathbf{O}_{7 \times 1} \\ \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \Phi_4 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{O}_{7 \times 1}$  — нулевой столбец размером  $7 \times 1$ .

*Замечание 1.* Система уравнений (21), (22) получена в предположении, что метрики внешних поверхностей оболочки эквивалентны метрике срединной поверхности  $\Omega^M$ . В то же время это допущение не используется при рассмотрении интеграла  $\delta J_c$  из вариационного уравнения (7), поскольку может привести к погрешностям при формулировке контактных ограничений для оболочек средней толщины. Отметим также, что было использовано аналитическое интегрирование [8, 9], что, очевидно, является прерогативой геометрически точного элемента оболочки.

Дополним уравнения равновесия элемента (21) условиями контакта, которые представим в виде

$$\Psi_r = \frac{1}{\epsilon} \lambda_r, \quad \lambda_r \leq 0 \quad \text{для } r \in I_c, \quad (23)$$

$$\Psi_r > 0, \quad \lambda_r = 0 \quad \text{для } r \notin I_c,$$

где  $I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$  — множество узлов элемента, вступающих в контакт с жестким телом.

Для решения нелинейной системы (21) с ограничениями (23) воспользуемся инкрементальным подходом. Рассмотрим два деформированных состояния оболочки (необязательно близких друг к другу) и снабдим верхним левым индексом  $t$  величины, характеризующие предыдущее состояние оболочки, в то время как величины с индексом  $t + \Delta t$  будем относить к последующему состоянию, т.е. имеем

$${}^{t+\Delta t} p^- = {}^t p^- + \Delta p^-, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{V} = {}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = {}^t \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda} = {}^t \mathbf{\Lambda} + \Delta \mathbf{\Lambda}, \quad (24)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{E}^{\eta_2} = {}^t \mathbf{E}^{\eta_2} + \Delta \mathbf{E}^{\eta_2}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{H}^{\eta_2} = {}^t \mathbf{H}^{\eta_2} + \Delta \mathbf{H}^{\eta_2},$$

где  $\Delta p^-$ ,  $\Delta \mathbf{V}$ ,  $\Delta \mathbf{F}$ ,  $\Delta \mathbf{\Lambda}$ ,  $\Delta \mathbf{E}^{\eta_2}$ ,  $\Delta \mathbf{H}^{\eta_2}$  — инкрементальные переменные.

Введем формулы (24) в уравнения (21) и, полагая, что последние удовлетворяются для “момента времени”  $t$ , приходим к инкрементальной форме

уравнений равновесия конечного элемента оболочки при наличии односторонних контактных ограничений

$$\Delta \mathbf{E}^{\eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T ({}^t \mathbf{M}^{\eta_2} + \mathbf{R}^{\eta_2} \Delta \mathbf{V}) \Delta \mathbf{V}, \quad (25)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{\eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_2} \Delta \mathbf{E}^{\eta_2}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} [2(\mathbf{R}^{\eta_2} \Delta \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_2} + ({}^t \mathbf{M}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} \Delta \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_2} \Delta \mathbf{H}^{\eta_2}] + \\ & + \Xi({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}) {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\Lambda} - \Xi({}^t \mathbf{V}) {}^t \boldsymbol{\Lambda} = \Delta \mathbf{F} + {}^{t+\Delta t} p^- \mathbf{G}^- ({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}) - {}^t p^- \mathbf{G}^- ({}^t \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (27)$$

$${}^t \mathbf{M}^{\eta_2} = \mathbf{B}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} {}^t \mathbf{V}.$$

Условия контакта оболочки с жестким основанием (23) также представим в инкрементальной форме

$$\Psi_r({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}) = \frac{1}{\epsilon} {}^{t+\Delta t} \lambda_r, \quad {}^{t+\Delta t} \lambda_r \leq 0 \quad \text{для } r \in {}^{t+\Delta t} I_c, \quad (28)$$

$$\Psi_r({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}) > 0, \quad {}^{t+\Delta t} \lambda_r = 0 \quad \text{для } r \notin {}^{t+\Delta t} I_c,$$

где  ${}^{t+\Delta t} I_c \subset \{1, 2, 3, 4\}$  — множество узлов, вступающих в контакт в “момент времени”  $t + \Delta t$ .

Исключая с помощью соотношений (28) узловые значения множителя Лагранжа из уравнения (27), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} [2(\mathbf{R}^{\eta_2} \Delta \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_2} + ({}^t \mathbf{M}^{\eta_2} + 2\mathbf{R}^{\eta_2} \Delta \mathbf{V})^T \mathbf{Q}^{\eta_2} \Delta \mathbf{H}^{\eta_2}] + \\ & + \epsilon (\Xi \Pi) ({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}) - {}^{t+\Delta t} p^- \mathbf{G}^- ({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}) = \Delta \mathbf{F} + \Xi({}^t \mathbf{V}) {}^t \boldsymbol{\Lambda} - {}^t p^- \mathbf{G}^- ({}^t \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Pi = [\Pi_1 \ \Pi_2 \ \Pi_3 \ \Pi_4]^T, \quad \Pi_r = \begin{cases} \Psi_r & \text{для } r \in {}^{t+\Delta t} I_c, \\ 0 & \text{для } r \notin {}^{t+\Delta t} I_c. \end{cases}$$

Решение инкрементальных уравнений (25), (26), (29) получим методом Ньютона—Рафсона, представив итерационный процесс в виде

$$\Delta \mathbf{V}^{[n+1]} = \Delta \mathbf{V}^{[n]} + \Delta \hat{\mathbf{V}}^{[n]}, \quad \Delta \mathbf{E}^{\eta_2 [n+1]} = \Delta \mathbf{E}^{\eta_2 [n]} + \Delta \hat{\mathbf{E}}^{\eta_2 [n]}, \quad (30)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2 [n+1]} = \Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2 [n]} + \Delta \hat{\mathbf{H}}^{\eta_1 \eta_2 [n]} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (30)$$

Подставляя соотношения (30) в уравнения (25), (26), (29), линеаризуя полученные уравнения и исключая инкрементальные деформации  $\Delta \hat{\mathbf{E}}^{\eta_1 \eta_2 [n]}$  и инкрементальные результирующие напряжений  $\Delta \hat{\mathbf{H}}^{\eta_1 \eta_2 [n]}$ , приходим к разрешающей системе МКЭ

$$\mathbf{K} \Delta \hat{\mathbf{V}}^{[n]} = \Delta \mathbf{F}^{[n]}. \quad (31)$$

Здесь  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_L + \epsilon \mathbf{K}_C$  — тангенциальная матрица жесткости элемента оболочки;  $\Delta \mathbf{F}^{[n]}$  — столбец правых частей, для которых имеют место формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_D &= \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} ({}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]})^T \mathbf{D}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]}, \\ \mathbf{K}_H &= 2 \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} + \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2 [n]}) \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2}, \\ \mathbf{K}_L &= -({}^t p^- + \Delta p^-) \frac{\partial \mathbf{G}^-}{\partial \mathbf{V}} ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}), \\ \mathbf{K}_C &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{k}_2 & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{k}_3 & \mathbf{O}_{7 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{k}_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}^{[n]} &= \Delta \mathbf{F} - \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} [({}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]})^T \mathbf{D}^{\eta_1 \eta_2} ({}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]} - \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} \Delta \mathbf{V}^{[n]}) + \\ &+ 2(\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} {}^t \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2}) \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2}] \Delta \mathbf{V}^{[n]} - \epsilon (\Xi \Pi) ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}) + \Xi ({}^t \mathbf{V})^t \Lambda + \\ &+ ({}^t p^- + \Delta p^-) \mathbf{G}^- ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}) - {}^t p^- \mathbf{G}^- ({}^t \mathbf{V}), \end{aligned}$$

$${}^t \mathbf{L}^{\eta_1 \eta_2 [n]} = \mathbf{V}^{\eta_1 \eta_2} + 2 \mathbf{R}^{\eta_1 \eta_2} ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}), \quad \mathbf{D}^{\eta_1 \eta_2} = \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T,$$

где  $\mathbf{O}_{7 \times 7}$  — нулевая матрица размером  $7 \times 7$ ;  $\mathbf{k}_r$  — матрицы размером  $7 \times 7$ , характеризующие контактное взаимодействие узлов элемента оболочки с жестким основанием,  $\mathbf{k}_r = \mathbf{O}_{7 \times 7}$  для  $r \notin {}^{t+\Delta t} I_c$ , а при  $r \in {}^{t+\Delta t} I_c$  ненулевые элементы соответствующих матриц  $\mathbf{k}_r$  имеют вид

$$(\mathbf{k}_r)_{3+i,3+j} = \left( \Psi_r \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial u_{ir}^+ \partial u_{jr}^+} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{ir}^+} \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{jr}^+} \right) ({}^t \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{[n]}). \quad (33)$$

Инкрементальные результирующие напряжений на  $n$ -м шаге итерационного процесса вычисляем по формуле

$$\mathbf{Q}^{n/2} \Delta \mathbf{H}^{n/2[n]} = \mathbf{D}^{n/2} [({}^t \mathbf{M}^{n/2} + 2\mathbf{R}^{n/2} \Delta \mathbf{V}^{[n-1]}) \Delta \mathbf{V}^{[n]} - (\mathbf{R}^{n/2} \Delta \mathbf{V}^{[n-1]}) \Delta \mathbf{V}^{[n-1]}],$$

$$\Delta \mathbf{V}^{[0]} = \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{H}^{n/2[0]} = \mathbf{0}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее используем стандартную процедуру сборки элементов оболочки в ансамбль с последующим получением разрешающей системы линейных уравнений относительно глобального вектора инкрементальных перемещений  $\Delta \mathbf{U}$ . Эта система решается, как и в работе [9], модифицированным методом Гаусса для ленточных матриц. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\|\Delta \mathbf{U}^{[n+1]} - \Delta \mathbf{U}^{[n]}\| < \varepsilon \|\Delta \mathbf{U}^{[n]}\|, \quad (34)$$

где  $\|\dots\|$  — евклидова норма в пространстве перемещений;  $\varepsilon$  — априори заданная точность вычислений.

*Замечание 2.* Очевидно, что нелинейность, обусловленная контактным взаимодействием оболочки с жестким телом, возникает уже в процессе конечно-элементной дискретизации. Это является следствием того, что множество узлов, вступающих в контакт  ${}^{t+\Delta t} I_c^A \subset \{1, 2, \dots, N^A\}$ , заранее неизвестно. Для того чтобы решить проблему, используем метод проб и ошибок [3]. Предположим, что все вступившие в контакт узлы известны в “момент времени”  $t + \Delta t$ . В результате можно найти решение разрешающей системы уравнений итерационно, удовлетворяя критерию сходимости (34). Следующий этап заключается в проверке неравенств

$$\Psi_L({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) > 0 \quad \text{для } L \in {}^{t+\Delta t} I_c^A, \quad (35)$$

$$\Psi_L({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) \leq 0 \quad \text{для } L \notin {}^{t+\Delta t} I_c^A. \quad (36)$$

Если выполняется неравенство (35), узел является ошибочным и выводится из зоны контакта. Если удовлетворяется неравенство (36), узел включается в множество  ${}^{t+\Delta t} I_c^A$ . Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено корректное решение.

Численные результаты

В качестве первого примера рассмотрим задачу контактного взаимодействия однородного кольца под действием сосредоточенной силы  $P$  и следящего давления  $p_0$  с абсолютно жесткими плоским и цилиндрическими ( $R_b = 100$  и  $R_b = 1000$ ) основаниями. Геометрические и механические параметры кольца показаны на рис. 2—а. Условия непроникания контактирующих тел (1), (2) для плоского и цилиндрического оснований можно представить с помощью соотношений

$$\Psi = \bar{R}_3^+ \geq 0,$$

$$\bar{R}_3^+ = \left( R + \frac{1}{2}h \right) (1 - \cos \varphi) + u_1^+ \sin \varphi - u_3^+ \cos \varphi$$

и

$$\Psi = \frac{1}{2R_b} (\bar{R}_1^+)^2 + \frac{1}{2R_b} (\bar{R}_3^+ + R_b)^2 - \frac{1}{2}R_b \geq 0,$$

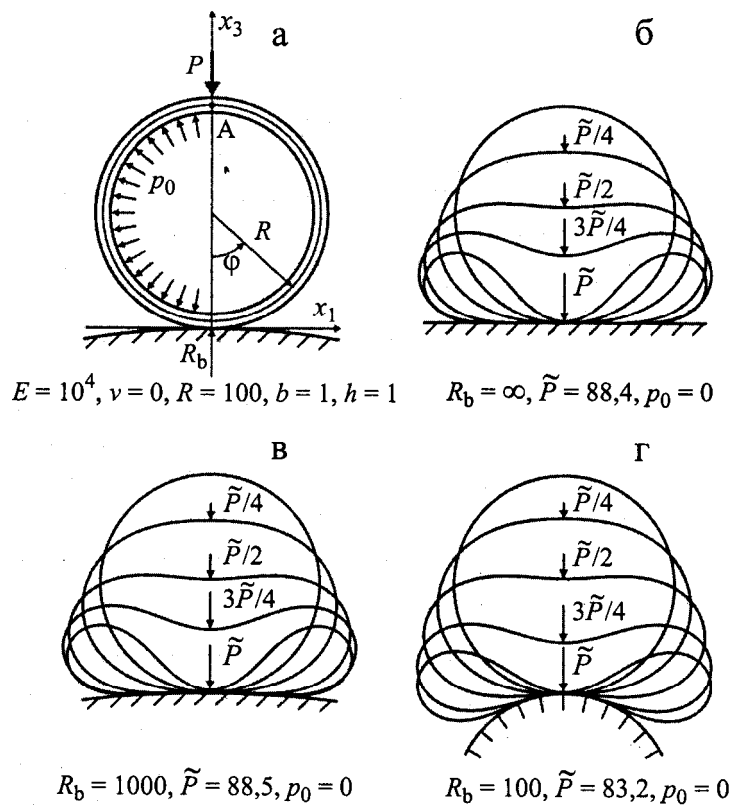


Рис. 2. Схема контактного взаимодействия кольца с плоским и цилиндрическим основаниями (а) и деформированные профили (б—г).

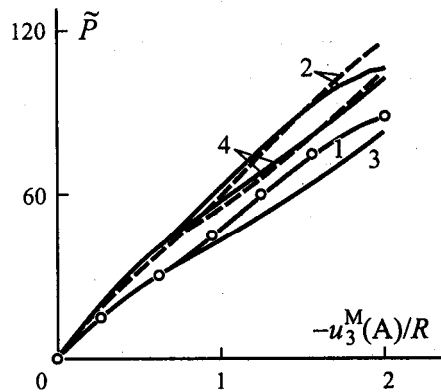


Рис. 3. Кривые нагрузка—прогиб с учетом (—) и без учета (- - -) следящего нагружения для однородного кольца: 1 —  $R_b = \infty$ ,  $p_0 = 0$ ; 2 —  $R_b = \infty$ ,  $p_0 = 10^{-3}$ ; 3 —  $R_b = 100$ ,  $p_0 = 0$ ; 4 —  $R_b = 100$ ,  $p_0 = 10^{-3}$ .

$$\bar{R}_1^+ = \left( R + \frac{1}{2}h \right) \sin \varphi + u_1^+ \cos \varphi + u_3^+ \sin \varphi,$$

где  $R_b$  — радиус кольца.

Вследствие симметрии задачи рассмотрим правую половину кольца и будем использовать равномерные конечно-элементные сетки  $60 \times 1$ . Расчеты выполнены на основе разработанных геометрически точных билинейных элементов оболочки GEX7P4CF и GEX7P4C с учетом и без учета следящего нагружения. При этом была достигнута заданная точность вычислений  $\epsilon = 10^{-6}$  согласно критерию сходимости (34). Для параметра регуляризации было выбрано оптимальное для данного класса задач значение  $\epsilon = 10^2$ .

На рис. 2—б и 3 показаны деформированные профили кольца и кривые нагрузка—прогиб при разных значениях параметров  $R_b$  и  $p_0$ . В качестве безразмерного параметра нагружения принято  $\tilde{P} = 120PR^2/Eh^3b$ . Точками представлены данные работы [12], полученные на основе классической теории оболочек типа Тимошенко. В табл. 1 приведены значения поперечного перемещения  $u_3^M$  в точке А и результирующей узловых контактных сил  $\tilde{P}_c = 120P_cR^2/Eh^3b$  с использованием разного числа шагов по нагрузке NLStep и показано полное число шагов в поисковом алгоритме метода проб и ошибок NTStep и полное число итераций NIter, необходимых для достижения указанной точности вычислений. Отметим, что в случае удачного выбора зоны контакта решение задачи возможно без привлечения инкрементального подхода, т.е. NLStep = 1. Кроме того, число шагов по нагрузке не оказывает влияния на расчетные значения перемещений и контактных сил,

Табл. 1

Сравнительный анализ геометрически точных элементов оболочки GEX7P4C и GEX7P4CF в задаче контакта кольца под действием силы  $\tilde{P} = 100$  и давления  $p_0 = 10^{-3}$  с жестким цилиндром радиусом  $R_b = 100$ , где  $D_1 = \{0\} \cup [5\varphi_0, 6\varphi_0]$ ,  $D_2 = [0, 3\varphi_0] \cup \{5\varphi_0\}$ ,  $\varphi_0 = \pi/60$

Элемент	Начальная зона контакта	NLStep	NTStep	NIter	$-u_3^M(A)$ , мм	$\tilde{P}_c$	Найденная зона контакта
GEX7P4CF	$[0, 5\varphi_0]$	1	6	45	195,3	100,1	$D_1$
GEX7P4C	$[0, 5\varphi_0]$	1	2	13	192,1	100,1	$D_2$
GEX7P4CF	$\{0\}$	3	19	100	195,3	100,1	$D_1$
GEX7P4C	$\{0\}$	3	14	90	192,1	100,1	$D_2$
GEX7P4CF	$\{0\}$	10	35	119	195,3	100,1	$D_1$
GEX7P4C	$\{0\}$	10	32	110	192,1	100,1	$D_2$

что свидетельствует об эффективности построенных геометрически точных элементов оболочки.

Рассмотрим далее четырехслойную перекрестно армированную резинокордную торообразную оболочку кругового поперечного сечения, нагруженную равномерно распределенным по внутренней поверхности давлением  $p_0 = 0,5$  МПа и обжимаемую на плоское или цилиндрическое основание путем перемещения последних на величину  $\Delta$  таким образом, что защемленные сечения оболочки с координатами  $\pm 120^\circ$  остаются неподвижными (рис. 4). С помощью этой оболочки будем моделировать каркас диагональ-

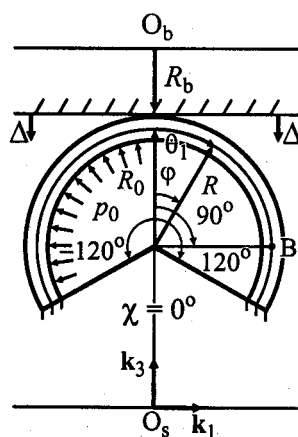


Рис. 4. Контактное взаимодействие перекрестно армированной торообразной оболочки с плоским ( $R_b = \infty$ ) и цилиндрическим основаниями.

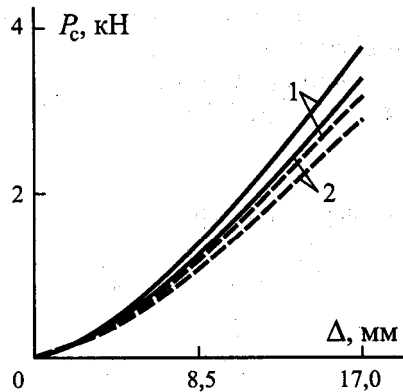


Рис. 5. Кривые нагрузка—прогиб  $P_c-\Delta$  с учетом (—) и без учета (- - -) следящего нагружения для перекрестно армированной торообразной оболочки при  $R_b = \infty$  (1), 1000 мм (2).

ной шины. Исходные характеристики элементарных резинокордных слоев следующие [9]:  $E_L = 510,45$  МПа,  $E_T = 6,91$  МПа,  $G_{LT} = 2,33$  МПа,  $G_{TT} = 1,77$  МПа,  $\nu_{LT} = 0,46$ . Пусть толщина оболочки  $h = 4,8$  мм, толщина резинокордного слоя  $h_k = 1,2$  мм, ориентация резинокордных слоев  $\gamma_k = (-1)^{k-1} \gamma$ , где  $\gamma = 45^\circ$  и  $k = \overline{1, 4}$ . В качестве отсчетной поверхности примем срединную поверхность оболочки, образованную вращением части окружности радиусом  $R = 50$  мм. Расстояние от оси вращения до экватора срединной поверхности  $R_0 = 250$  мм. Условия непроникания контактирующих тел для плоского и цилиндрического оснований запишем в виде

$$\Psi = R_0 + \frac{1}{2} h - \Delta - \bar{R}_3^+ \geq 0,$$

$$\bar{R}_3^+ = A_2 \cos \chi - u_1^+ \sin \varphi \cos \chi - u_2^+ \sin \chi + \left( \frac{1}{2} h + u_3^+ \right) \cos \varphi \cos \chi$$

и

$$\Psi = \frac{1}{2R_b} (\bar{R}_2^+)^2 + \frac{1}{2R_b} \left( R_0 + \frac{1}{2} h + R_b - \Delta - \bar{R}_3^+ \right)^2 - \frac{1}{2} R_b \geq 0,$$

$$\bar{R}_2^+ = A_2 \sin \chi - u_1^+ \sin \varphi \sin \chi + u_2^+ \cos \chi + \left( \frac{1}{2} h + u_3^+ \right) \cos \varphi \sin \chi,$$

где  $\chi$  — окружная координата;  $A_2 = R_0 - R(1 - \cos \varphi)$  — параметр Ламе.

Результаты расчета шины на действие следящего и консервативного нагружений получены с помощью нерегулярных конечно-элементных сеток  $48 \times 36$  при  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  $\epsilon = 10^4$  (рис. 5, табл. 2). Как видим, данные табл. 1 и 2 качественно согласуются друг с другом. В частности, решение и этой задачи



Табл. 2

Сравнительный анализ геометрически точных элементов оболочки GEX7P4C и GEX7P4CF в задаче контакта торообразной оболочки с плоским основанием при  $\Delta = 17$  мм, где  $D = \{(\varphi, \chi): (5\varphi/\pi)^2 + (10\chi/\pi)^2 \leq 1\}$

Элемент	Начальная зона контакта	NLStep	NTStep	NIter	$u_3^M(B)$ , мм	$P_c$ , Н	Площадь контактной зоны, мм <sup>2</sup>
GEX7P4CF	$D$	1	3	15	3,040	3754	6937
GEX7P4C	$D$	1	4	20	3,158	3186	6265
GEX7P4CF	(0, 0)	1	8	36	3,040	3754	6937
GEX7P4C	(0, 0)	1	8	36	3,158	3186	6265
GEX7P4CF	(0, 0)	10	33	129	3,040	3754	6937
GEX7P4C	(0, 0)	10	32	125	3,158	3186	6265

для диагональной шины может быть найдено без привлечения инкрементального подхода. Здесь, однако, влияние следящего давления проявляется в большей степени. Так, погрешность вычисления результирующей узловых контактных сил  $P_c$  составляет 17,8%. Дополнительно на рис. 6 представлена зависимость контактного давления  $p_c^+$  от меридиональной координаты  $\varphi$  в центральном сечении оболочки при  $R_b = 1000$  мм и  $\Delta = 17$  мм. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными данными [13] о том, что максимальные значения контактного давления в пневматической шине смещаются к границе контактной области.

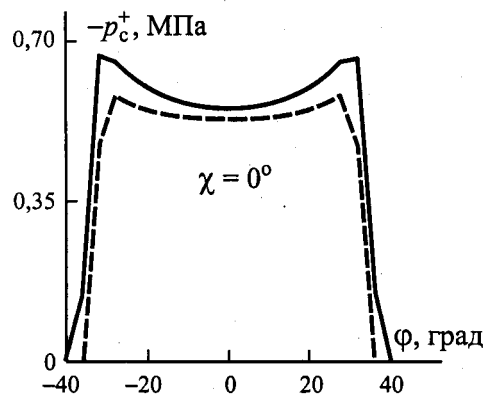


Рис. 6. Распределение контактного давления в случае учета (—) и без учета (- - -) следящего нагружения для перекрестно армированной торообразной оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00373) и Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/660).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stein E., Wagner W., and Wriggers P.* Finite element postbuckling analysis of shells with non-linear contact constraints // *Finite Element Methods for Non-linear Problems / Eds by P. G. Bergan, K. J. Bathe, W. Wunderlich.* — Berlin: Springer, 1986. — P. 719—744.
2. *Zhong Z. H.* Finite element procedures for contact-impact problems. — Oxford: Oxford University Press Inc., 1993. — 371 p.
3. *Karaoglan L. and Noor A. K.* Sensitivity analysis of frictional contact response of axisymmetric composite structures // *Comput. Struct.* — 1995. — Vol. 55, No. 6. — P. 937—954.
4. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Контактная задача для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко // *Прикл. математика и механика.* — 2003. — Т. 67, № 6. — С. 940—953.
5. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Контактная задача для пневматической шины, взаимодействующей с жестким основанием // *Механика композит. материалов.* — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 661—674.
6. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part III. Analysis of TM shells with constraints // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2007. — Vol. 196, No. 7. — P. 1203—1215.
7. *Simo J. C., Wriggers P., and Taylor R. L.* A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1985. — Vol. 50, No. 2. — P. 163—180.
8. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom // *Comput. Model. Eng. Sci.* — 2008. — Vol. 28, No. 1. — P. 15—38.
9. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Расчет композитных конструкций под действием следящих нагрузок с использованием геометрически точного элемента оболочки // *Механика композит. материалов.* — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 789—804.
10. *Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха.* — Киев: Вища школа, 1982. — 480 с.
11. *Bathe K. J.* Finite element procedures. — NJ: Prentice Hall, 1996. — 1037 p.
12. *Noor A. K. and Kim K. O.* Mixed finite element formulation for frictionless contact problems // *Finite Elem. Anal. Des.* — 1989. — Vol. 4, No. 4. — P. 315—332.
13. *Ridha R. A. and Theves M.* Advances in tire mechanics // *IRC 94.* — M., 1994. — Vol. 1. — P. 54—126.

Поступила в редакцию 02.03.2009  
Received March 2, 2009