

Г. М. Куликов, С. В. Плотникова*

Тамбовский государственный технический университет, Россия

**РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ
ТЕРМОПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
ТОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ**

G. M. Kulikov and S. V. Plotnikova*

**SOLUTION OF A COUPLED PROBLEM OF THERMOPIEZOELECTRICITY
BASED ON A GEOMETRICALLY EXACT SHELL ELEMENT**

Keywords: laminated piezoelectric shell, thermopiezoelectricity, 7-parameter shell model, geometrically exact shell element

Based on a 7-parameter shell model, a numerical algorithm has been developed for solving a coupled problem of thermoelectroelasticity for a laminated piezoelectric shell subjected to thermoelectromechanical loading. As unknowns, the six tangential and transverse displacements of outer surfaces and the transverse displacement of shell midsurface are chosen. This choice provides a possibility of utilizing the complete 3D constitutive equations of thermopiezoelectricity. A geometrically exact hybrid piezoelectric solid shell element is formulated by using nonconventional analytical integration. With the help of this finite element, solutions of coupled problems of thermoelectroelasticity for laminated plates and shells with segmented and distributed piezoelectric sensors and actuators are obtained.

Ключевые слова: оболочка слоистая пьезоэлектрическая, термопьезоэлектричество, модель оболочки 7-параметрическая, элемент оболочки геометрически точный

На основе 7-параметрической модели оболочки разработан алгоритм численного решения связанной задачи термоэлектроупругости для слоистой пьезоэлектрической оболочки, подверженной термоэлектро механическому нагружению. В качестве искомых функций выбраны шесть тангенциальных и поперечных перемещений внешних поверхностей и поперечное перемещение срединной поверхности оболочки, что дает возможность

*Автор, с которым следует вести переписку: kulikov@apmath.tstu.ru
Corresponding author: kulikov@apmath.tstu.ru

использовать пространственные уравнения состояния термопьезоэлектричества. Построен геометрически точный трехмерный гибридный пьезоэлектрический элемент оболочки путем использования нетрадиционного аналитического интегрирования. С помощью этого конечного элемента получено решение связанных задач термоэластостатики для слоистых пластин и оболочек с распределенными пьезоэлектрическими сенсорами и актюаторами.

Введение

При эксплуатации тонкостенных конструкций из композитных материалов в них могут возникать критические деформации и напряжения, вызванные изменением температуры окружающей среды. В современных технологиях для компенсации таких деформаций и управления формой конструкций применяются пьезоэлектрические материалы, помещенные в тело конструкции или закрепленные на ее поверхностях. В связи с этим активно разрабатываются и внедряются в промышленность новые программные продукты на основе *изопараметрических* трехмерных конечных элементов оболочки с распределенными пьезоэлектрическими сенсорами и актюаторами [1—6]. Их особенностью является то, что начальная и деформированная конфигурации оболочки интерполируются единообразно в глобальной декартовой системе координат, что дает возможность корректно описать перемещения оболочки как жесткого тела. Однако изопараметрический элемент оболочки является вычислительно неэффективным при расчете адаптивных композитных конструкций, для которых важное значение имеет быстрое реагирование на нежелательные внешние термосиловые воздействия.

Альтернативными являются *геометрически точные* конечные элементы оболочки на основе деформационных соотношений 6-, 7- и 9-параметрических пространственных моделей оболочек [7—10], которые точно представляют перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных координат отсчетной поверхности. Термин “геометрически точный” означает, что отсчетная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями, в частности сплайнами, которые составляют основу современных САД систем. При этом векторы перемещений внешних и срединной поверхностей представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью оболочки. Именно это обстоятельство позволяет повысить производительность конечно-элементного кода и эффективно использовать его в контроллерах адаптивных тонкостенных конструкций.

В настоящей статье разработан новый геометрически точный 7-параметрический билинейный элемент оболочки для расчета тонкостенных композитных конструкций с распределенными сенсорами и актюаторами под действием термоэлектромеханического нагружения. Для борьбы с известным в методе конечных элементов (МКЭ) явлением запирания как сдвигового, так и мембранного использована гибридная модель МКЭ [8, 9]. Согласно этой модели деформации и результирующие напряжения внутри

элемента оболочки аппроксимируются самостоятельно, отдельно от перемещений. Необходимо отметить, что 6-параметрическая модель [8], постулирующая равномерное распределение поперечных нормальных деформаций по толщине пакета слоев, приводит к пуассоновскому заклиниванию элемента оболочки в поперечном направлении, в то время как 7-параметрическая модель [9] свободна от указанного недостатка.

Кинематика оболочки и деформационные соотношения

Рассмотрим оболочку, состоящую из N тонких слоев постоянной толщины $h_n = z_n - z_{n-1}$, включая l -й пьезоэлектрический слой PZT толщиной h_l , где z_n — поперечная координата поверхности Ω_n (рис. 1). Пусть криволинейные ортогональные координаты θ_1, θ_2 отсчитываются вдоль линий главных кривизн, а координата θ_3 направлена в поперечном направлении; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — единичные векторы касательных к координатным линиям θ_1, θ_2 ; \mathbf{e}_3 — единичный вектор внешней нормали к поверхности Ω . Здесь и ниже индекс n обозначает принадлежность величины к n -му слою и изменяется в пределах от 1 до N ; индекс пьезоэлектрического слоя $l = i_1, i_2, \dots, i_L$, где L — число пьезоэлектрических слоев, прикрепленных к внешним поверхностям или внедренных в тело оболочки; $\alpha, \beta = 1, 2; i, j = 1, 2, 3$; индекс \mp определяет принадлежность величины к верхней (+) или нижней (–) поверхности соответственно.

Поле перемещений аппроксимируется по толщине оболочки согласно закону [9]

$$u_\alpha = N^- u_\alpha^- + N^+ u_\alpha^+, \quad u_3 = L^- u_3^- + L^M u_3^M + L^+ u_3^+, \quad (1)$$

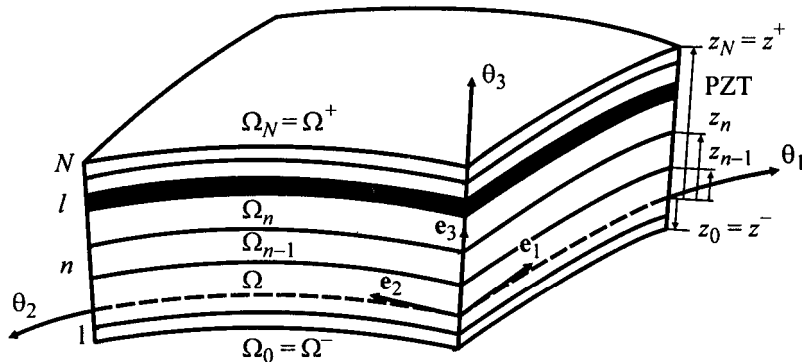


Рис. 1. Схема слоистой оболочки с внедренным пьезоэлектрическим слоем (PZT).

$$N^- = \frac{1}{h}(z^+ - \theta_3), \quad N^+ = \frac{1}{h}(\theta_3 - z^-), \quad (2)$$

$$L^- = N^-(N^- - N^+), \quad L^M = 4N^-N^+, \quad L^+ = N^+(N^+ - N^-), \quad (3)$$

где $u_i^A(\theta_1, \theta_2)$ — тангенциальные и поперечные перемещения лицевых поверхностей оболочки Ω^- и Ω^+ ; $u_3^M(\theta_1, \theta_2)$ — поперечное перемещение срединной поверхности Ω^M ; $N^A(\theta_3)$ и $L^A(\theta_3)$, $L^M(\theta_3)$ — полиномы Лагранжа первого и второго порядков соответственно; $h = z^+ - z^-$ — толщина оболочки; $z^- = z_0$ и $z^+ = z_N$ — поперечные координаты лицевых поверхностей.

Представим векторы перемещений лицевых поверхностей оболочки в базисе отсчетной поверхности

$$\mathbf{u}^A = \sum_i u_i^A \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

В этом случае деформационные соотношения 7-параметрической теории оболочек первого порядка [9] могут быть записаны в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = N^- \varepsilon_{\alpha\beta}^- + N^+ \varepsilon_{\alpha\beta}^+, \quad \varepsilon_{33} = N^- \varepsilon_{33}^- + N^+ \varepsilon_{33}^+, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3}^M, \quad \varepsilon_{\alpha 3}^M = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha 3}^- + \varepsilon_{\alpha 3}^+).$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^A(\theta_1, \theta_2)$ — компоненты тензора деформаций лицевых поверхностей оболочки:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^A = c_\alpha^A \lambda_{\alpha\beta}^A + c_\beta^A \lambda_{\beta\alpha}^A, \quad \varepsilon_{33}^A = \beta_3^A, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^A = c_\alpha^A \beta_\alpha^A + \lambda_{3\alpha}^A, \quad (6)$$

где

$$\lambda_{\alpha\alpha}^A = \frac{1}{A_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^A + B_\beta u_\beta^A + k_\alpha u_3^A, \quad \lambda_{\beta\alpha}^A = \frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha}^A - B_\beta u_\alpha^A \quad \text{для } \beta \neq \alpha,$$

$$\lambda_{3\alpha}^A = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^A - k_\alpha u_\alpha^A, \quad \beta_\alpha^A = \frac{1}{h}(u_\alpha^+ - u_\alpha^-), \quad (7)$$

$$\beta_3^- = \frac{1}{h}(-3u_3^- + 4u_3^M - u_3^+), \quad \beta_3^+ = \frac{1}{h}(u_3^- - 4u_3^M + 3u_3^+), \quad (7)$$

$$c_\alpha^A = 1 + k_\alpha z^A, \quad B_\alpha = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\beta,\alpha} \quad \text{для } \beta \neq \alpha;$$

A_α и k_α — параметры Ламе и главные кривизны отсчетной поверхности; c_α^A — компоненты тензора сдвига на лицевых поверхностях оболочки; символ $(\)_{,\alpha}$ означает частную производную по координате θ_α . Можно показать, что деформационные соотношения (5), (6) точно представляют перемещения оболочки как твердого целого в системе криволинейных координат отсчетной поверхности [10].

Описание электрического и температурного полей

Полагаем, что электрический потенциал распределен по толщине пакета слоев согласно гипотезе ломаной линии [11, 12]

$$\varphi = \sum_n (\bar{N}_n^- \varphi_{n-1} + \bar{N}_n^+ \varphi_n), \quad \bar{N}_n^A = \begin{cases} N_n^A, & \theta_3 \in [z_{n-1}, z_n], \\ 0, & \theta_3 \notin [z_{n-1}, z_n] \end{cases}, \quad (8)$$

$$N_n^- = \frac{1}{h_n}(z_n - \theta_3), \quad N_n^+ = \frac{1}{h_n}(\theta_3 - z_{n-1}), \quad \theta_3 \in [z_{n-1}, z_n],$$

где $\varphi_{n-1}(\theta_1, \theta_2)$, $\varphi_n(\theta_1, \theta_2)$ — значения электрического потенциала на нижней и верхней поверхностях n -го слоя.

Связь между вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} и электрическим потенциалом φ определяется посредством известного в электростатике уравнения

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (9)$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля имеет следующее распределение по толщине n -го слоя:

$$E_\alpha^{(n)} = N_n^- E_\alpha^{(n)-} + N_n^+ E_\alpha^{(n)+}, \quad E_3^{(n)} = -\frac{1}{h_n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \quad (10)$$

$$E_\alpha^{(n)-} = -\frac{1}{A_\alpha} \varphi_{n-1,\alpha}, \quad E_\alpha^{(n)+} = -\frac{1}{A_\alpha} \varphi_{n,\alpha},$$

где $E_i^{(n)}$ — тангенциальные и поперечная компоненты вектора напряженности электрического поля n -го слоя. Как видим, поперечная компонента $E_3^{(n)}$ постоянна по толщине пьезоэлектрического слоя, что, однако, не вносит существенных ограничений в анализ пьезоэлектрических оболочек. При необходимости путем разбиения пьезоэлектрического слоя на несколько фиктивных слоев можно добиться приемлемых для практических приложений результатов.

Для температурного поля воспользуемся аналогичной аппроксимацией

$$\Theta = \sum_n (\bar{N}_n^- \Theta_{n-1} + \bar{N}_n^+ \Theta_n), \quad (11)$$

где $\Theta = T - T_0$ — прирост температуры от естественного состояния; T_0 — температура естественного состояния по шкале Кельвина; $\Theta_{n-1}(\theta_1, \theta_2)$, $\Theta_n(\theta_1, \theta_2)$ — значения температуры на внешних поверхностях n -го слоя.

Уравнения состояния термоэлектроупругости

Уравнения состояния линейной теории термоэлектроупругости для l -го пьезоэлектрического слоя моноклинной системы класса 2 при наличии двукратной оси симметрии, параллельной поперечной координате, могут быть записаны в форме [13]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{(l)} \boldsymbol{\sigma}^{(l)} + (\mathbf{d}^{(l)})^T \mathbf{E}^{(l)} + \boldsymbol{\alpha}^{(l)} \Theta, \quad (12)$$

$$\mathbf{D}^{(l)} = \mathbf{d}^{(l)} \boldsymbol{\sigma}^{(l)} + \boldsymbol{\zeta}^{(l)} \mathbf{E}^{(l)} + \boldsymbol{\eta}^{(l)} \Theta, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}^{(l)}$ — вектор напряжений; $\mathbf{E}^{(l)}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{D}^{(l)}$ — вектор смещения электрического поля; $\mathbf{A}^{(l)}$ — матрица податливостей; $\mathbf{d}^{(l)}$ — матрица пьезоэлектрических постоянных; $\boldsymbol{\zeta}^{(l)}$ — матрица диэлектрических постоянных; $\boldsymbol{\alpha}^{(l)}$ — вектор коэффициентов температурного расширения и сдвига; $\boldsymbol{\eta}^{(l)}$ — вектор пироэлектрических постоянных:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(l)} = [\sigma_{11}^{(l)} \ \sigma_{22}^{(l)} \ \sigma_{33}^{(l)} \ \sigma_{23}^{(l)} \ \sigma_{13}^{(l)} \ \sigma_{12}^{(l)}]^T, \\ \mathbf{E}^{(l)} = [E_1^{(l)} \ E_2^{(l)} \ E_3^{(l)}]^T, \quad \mathbf{D}^{(l)} = [D_1^{(l)} \ D_2^{(l)} \ D_3^{(l)}]^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}^{(l)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(l)} & A_{12}^{(l)} & A_{13}^{(l)} & 0 & 0 & A_{16}^{(l)} \\ & A_{22}^{(l)} & A_{23}^{(l)} & 0 & 0 & A_{26}^{(l)} \\ & & A_{33}^{(l)} & 0 & 0 & A_{36}^{(l)} \\ & & & A_{44}^{(l)} & A_{45}^{(l)} & 0 \\ & & & & A_{55}^{(l)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & A_{66}^{(l)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14}^{(l)} & d_{15}^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24}^{(l)} & d_{25}^{(l)} & 0 \\ d_{31}^{(l)} & d_{32}^{(l)} & d_{33}^{(l)} & 0 & 0 & d_{36}^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}^{(l)} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(l)} & \zeta_{12}^{(l)} & 0 \\ & \zeta_{22}^{(l)} & 0 \\ \text{sym.} & & \zeta_{33}^{(l)} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(l)} = [\alpha_1^{(l)} \alpha_2^{(l)} \alpha_3^{(l)} 0 0 2\alpha_6^{(l)}]^T, \quad \boldsymbol{\eta}^{(l)} = [0 0 \eta_3^{(l)}]^T.$$

Разрешая уравнение (12) относительно вектора напряжений и подставляя вектор напряжений в уравнение состояния (13), получим

$$\boldsymbol{\sigma}^{(l)} = \mathbf{C}^{(l)} \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{e}^{(l)})^T \mathbf{E}^{(l)} - \boldsymbol{\gamma}^{(l)} \Theta, \quad (15)$$

$$\mathbf{D}^{(l)} = \mathbf{e}^{(l)} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(l)} \mathbf{E}^{(l)} + \mathbf{g}^{(l)} \Theta, \quad (16)$$

где $\mathbf{C}^{(l)}$ — матрица материальных жесткостей; $\mathbf{e}^{(l)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(l)}$ — пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы; $\boldsymbol{\gamma}^{(l)}$ — вектор температурных напряжений; $\mathbf{g}^{(l)}$ — вектор пирозлектрических постоянных:

$$\mathbf{C}^{(l)} = (\mathbf{A}^{(l)})^{-1}, \quad \mathbf{e}^{(l)} = \mathbf{d}^{(l)} \mathbf{C}^{(l)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(l)} = \boldsymbol{\zeta}^{(l)} - \mathbf{d}^{(l)} \mathbf{C}^{(l)} (\mathbf{d}^{(l)})^T, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(l)} = \mathbf{C}^{(l)} \boldsymbol{\alpha}^{(l)}, \quad \mathbf{g}^{(l)} = \boldsymbol{\eta}^{(l)} - \mathbf{d}^{(l)} \mathbf{C}^{(l)} \boldsymbol{\alpha}^{(l)}.$$

Смешанное вариационное уравнение для расчета слоистой термоэлектроупругой оболочки

Предлагаемая 7-параметрическая теория термопьезоэлектрических оболочек первого порядка основывается на аппроксимациях в поперечном направлении перемещений (1), деформаций (5), электрического потенциала (8), вектора напряженности электрического поля (10) и температуры (11). Введем также согласованные с (5) аппроксимации для независимых от поля перемещений деформаций

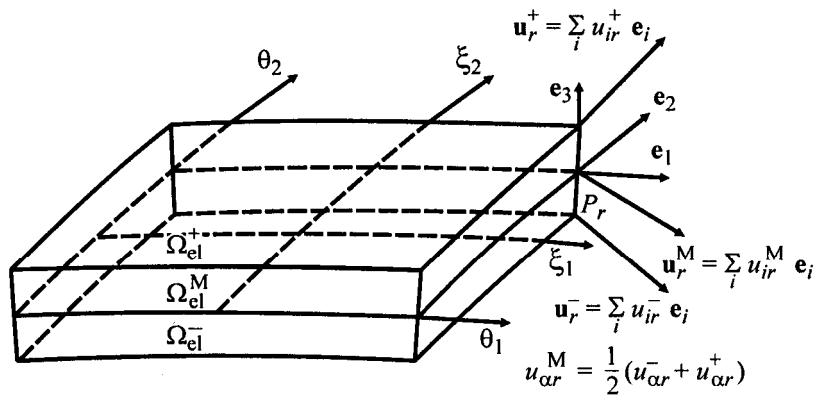


Рис. 2. Геометрически точный пьезоэлектрический элемент оболочки на основе 7-параметрической модели. P_r — узловая точка ($r = 1, 2, 3, 4$).

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = N^- \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^- + N^+ \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^+, \quad \hat{\varepsilon}_{33} = N^- \hat{\varepsilon}_{33}^- + N^+ \hat{\varepsilon}_{33}^+, \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha 3} = \hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^M, \quad (18)$$

где $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^A(\theta_1, \theta_2)$, $\hat{\varepsilon}_{33}^A(\theta_1, \theta_2)$ — независимо введенные тангенциальные и поперечные нормальные деформации внешних поверхностей оболочки; $\hat{\varepsilon}_{\alpha 3}^M(\theta_1, \theta_2)$ — независимо введенные деформации поперечного сдвига срединной поверхности.

Подставим далее аппроксимации (1), (5), (8), (10), (11) и (18) в смешанное вариационное уравнение пространственной теории термопьезоэлектричества [13, 14]. Вводя результирующие напряжений

$$H_{\alpha\beta}^A = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} N^A d\theta_3, \quad H_{33}^A = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{33}^{(n)} N^A d\theta_3, \quad H_{\alpha 3} = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{\alpha 3}^{(n)} d\theta_3 \quad (19)$$

и полагая метрики поверхностей, параллельных отсчетной, равными метрике срединной поверхности, получим вариационное уравнение Ху—Васидзу для 7-параметрического термопьезоэлектрического элемента оболочки

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\delta \hat{\varepsilon}^T (\mathbf{H} - \mathbf{D}_{uu} \hat{\varepsilon} + \mathbf{D}_{u\varphi} \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{D}_{u\theta} \Psi) + \delta \tilde{\mathbf{E}}^T (\mathbf{D}_{\varphi u} \hat{\varepsilon} + \mathbf{D}_{\varphi\varphi} \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{D}_{\varphi\theta} \Psi) + \delta \mathbf{H}^T (\hat{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}) - \delta \tilde{\varepsilon}^T \mathbf{H} + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} + \delta \chi^T \mathbf{q}] A_1 A_2 c_1^M c_2^M l_1 l_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0. \quad (20)$$

Здесь $\xi_\alpha = (\theta_\alpha - d_\alpha) / l_\alpha$ — нормализованные криволинейные координаты элемента (рис. 2); d_α — координаты центра элемента; $2l_\alpha$ — длина элемен-

та в направлении θ_α ; $c_\alpha^M = 1 + k_\alpha z^M$ — компоненты тензора сдвига на срединной поверхности оболочки; $z^M = (z^- + z^+)/2$ — поперечная координата срединной поверхности Ω^M ; \mathbf{v} — вектор перемещений внешних поверхностей; $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — векторы зависимых и не зависимых от поля перемещений деформаций внешних поверхностей; \mathbf{H} — вектор результирующих напряжений (19); $\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}$ — векторы электрических потенциалов и температур на внешних поверхностях оболочки и поверхностях раздела слоев; $\tilde{\mathbf{E}}$ — вектор напряженности электрического поля; \mathbf{p} — вектор поверхностных нагрузок; \mathbf{q} — вектор поверхностных зарядов на внешних поверхностях оболочки и поверхностях раздела слоев; $\mathbf{D}_{uu}, \mathbf{D}_{u\phi}, \mathbf{D}_{\phi\phi}$ — механическая, пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы; $\mathbf{D}_{u\theta}$ — матрица температурной жесткости; $\mathbf{D}_{\phi\theta}$ — пирозлектрическая матрица,

$$\mathbf{v} = [u_1^- \ u_2^- \ u_3^- \ u_1^+ \ u_2^+ \ u_3^+ \ u_3^M]^T,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11}^- \ \varepsilon_{11}^+ \ \varepsilon_{22}^- \ \varepsilon_{22}^+ \ \varepsilon_{33}^- \ \varepsilon_{33}^+ \ 2\varepsilon_{12}^- \ 2\varepsilon_{12}^+ \ 2\varepsilon_{13}^M \ 2\varepsilon_{23}^M]^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_{11}^- \ \hat{\varepsilon}_{11}^+ \ \hat{\varepsilon}_{22}^- \ \hat{\varepsilon}_{22}^+ \ \hat{\varepsilon}_{33}^- \ \hat{\varepsilon}_{33}^+ \ 2\hat{\varepsilon}_{12}^- \ 2\hat{\varepsilon}_{12}^+ \ 2\hat{\varepsilon}_{13}^M \ 2\hat{\varepsilon}_{23}^M]^T,$$

$$\mathbf{H} = [H_{11}^- \ H_{11}^+ \ H_{22}^- \ H_{22}^+ \ H_{33}^- \ H_{33}^+ \ H_{12}^- \ H_{12}^+ \ H_{13} \ H_{23}]^T,$$

$$\boldsymbol{\chi} = [\varphi_0 \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_N]^T, \quad \boldsymbol{\Psi} = [\Theta_0 \ \Theta_1 \ \dots \ \Theta_N]^T, \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = [(\tilde{\mathbf{E}}^{(1)})^T \ (\tilde{\mathbf{E}}^{(2)})^T \ \dots \ (\tilde{\mathbf{E}}^{(N)})^T]^T, \quad \tilde{\mathbf{E}}^{(n)} = [E_1^{(n)-} \ E_1^{(n)+} \ E_2^{(n)-} \ E_2^{(n)+} \ E_3^{(n)}]^T,$$

$$\mathbf{p} = [-p_1^- \ -p_2^- \ -p_3^- \ p_1^+ \ p_2^+ \ p_3^+ \ 0]^T, \quad \mathbf{q} = [q_s^{(0)} \ q_s^{(1)} \ \dots \ q_s^{(N)}]^T,$$

$$\mathbf{D}_{uu} = \begin{bmatrix} D_{11}^{00} & D_{11}^{01} & D_{12}^{00} & D_{12}^{01} & D_{13}^{00} & D_{13}^{01} & D_{16}^{00} & D_{16}^{01} & 0 & 0 \\ & D_{11}^{11} & D_{12}^{01} & D_{12}^{11} & D_{13}^{01} & D_{13}^{11} & D_{16}^{01} & D_{16}^{11} & 0 & 0 \\ & & D_{22}^{00} & D_{22}^{01} & D_{23}^{00} & D_{23}^{01} & D_{26}^{00} & D_{26}^{01} & 0 & 0 \\ & & & D_{22}^{11} & D_{23}^{01} & D_{23}^{11} & D_{26}^{01} & D_{26}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & D_{33}^{00} & D_{33}^{01} & D_{36}^{00} & D_{36}^{01} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{33}^{11} & D_{36}^{01} & D_{36}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & D_{66}^{00} & D_{66}^{01} & 0 & 0 \\ & & & & & & & D_{66}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & D_{55} & D_{45} \\ \text{sym.} & & & & & & & & & D_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\text{и}\phi} = [\mathbf{D}_{\text{и}\phi}^{(1)} \mathbf{D}_{\text{и}\phi}^{(2)} \dots \mathbf{D}_{\text{и}\phi}^{(N)}], \quad \mathbf{D}_{\phi\text{и}} = \mathbf{D}_{\text{и}\phi}^T,$$

$$\mathbf{D}_{\text{и}\phi}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{31}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{31}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{32}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{32}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{33}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{33}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{36}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{36}^{(n)} \\ k_n^0 e_{15}^{(n)} & k_n^1 e_{15}^{(n)} & k_n^0 e_{25}^{(n)} & k_n^1 e_{25}^{(n)} & 0 \\ k_n^0 e_{14}^{(n)} & k_n^1 e_{14}^{(n)} & k_n^0 e_{24}^{(n)} & k_n^1 e_{24}^{(n)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\text{и}\theta} = \begin{bmatrix} l_1^{00} \gamma_1^{(1)} & l_1^{01} \gamma_1^{(1)} + l_2^{00} \gamma_1^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{01} \gamma_1^{(N-1)} + l_N^{00} \gamma_1^{(N)} & l_N^{01} \gamma_1^{(N)} \\ l_1^{10} \gamma_1^{(1)} & l_1^{11} \gamma_1^{(1)} + l_2^{10} \gamma_1^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{11} \gamma_1^{(N-1)} + l_N^{10} \gamma_1^{(N)} & l_N^{11} \gamma_1^{(N)} \\ l_1^{00} \gamma_2^{(1)} & l_1^{01} \gamma_2^{(1)} + l_2^{00} \gamma_2^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{01} \gamma_2^{(N-1)} + l_N^{00} \gamma_2^{(N)} & l_N^{01} \gamma_2^{(N)} \\ l_1^{10} \gamma_2^{(1)} & l_1^{11} \gamma_2^{(1)} + l_2^{10} \gamma_2^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{11} \gamma_2^{(N-1)} + l_N^{10} \gamma_2^{(N)} & l_N^{11} \gamma_2^{(N)} \\ l_1^{00} \gamma_3^{(1)} & l_1^{01} \gamma_3^{(1)} + l_2^{00} \gamma_3^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{01} \gamma_3^{(N-1)} + l_N^{00} \gamma_3^{(N)} & l_N^{01} \gamma_3^{(N)} \\ l_1^{10} \gamma_3^{(1)} & l_1^{11} \gamma_3^{(1)} + l_2^{10} \gamma_3^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{11} \gamma_3^{(N-1)} + l_N^{10} \gamma_3^{(N)} & l_N^{11} \gamma_3^{(N)} \\ l_1^{00} \gamma_6^{(1)} & l_1^{01} \gamma_6^{(1)} + l_2^{00} \gamma_6^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{01} \gamma_6^{(N-1)} + l_N^{00} \gamma_6^{(N)} & l_N^{01} \gamma_6^{(N)} \\ l_1^{10} \gamma_6^{(1)} & l_1^{11} \gamma_6^{(1)} + l_2^{10} \gamma_6^{(2)} & \dots & l_{N-1}^{11} \gamma_6^{(N-1)} + l_N^{10} \gamma_6^{(N)} & l_N^{11} \gamma_6^{(N)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\phi\phi}^{(1)} & \mathbf{0}_{5 \times 5} & \dots & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{D}_{\phi\phi}^{(2)} & \dots & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{0}_{5 \times 5} & \dots & \mathbf{D}_{\phi\phi}^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\varphi\varphi}^{(n)} = \begin{bmatrix} k_n^{00} \in_{11}^{(n)} & k_n^{01} \in_{11}^{(n)} & k_n^{00} \in_{12}^{(n)} & k_n^{01} \in_{12}^{(n)} & 0 \\ & k_n^{11} \in_{11}^{(n)} & k_n^{01} \in_{12}^{(n)} & k_n^{11} \in_{12}^{(n)} & 0 \\ & & k_n^{00} \in_{22}^{(n)} & k_n^{01} \in_{22}^{(n)} & 0 \\ & & & k_n^{11} \in_{22}^{(n)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & h_n \in_{33}^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\varphi\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(1)} & \mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(1)} & \mathbf{0}_{5 \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(2)} & \mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(2)} & \dots & \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \dots & & & & & \\ \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 1} & \mathbf{0}_{5 \times 1} & \dots & \mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(N)} & \mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\varphi\theta}^{(n)} = [0000 h_n g_3^{(n)} / 2]^T,$$

где p_i^A — поверхностные нагрузки, действующие на внешних поверхностях в направлениях θ_i ; $q_s^{(n-1)}$, $q_s^{(n)}$ — плотности поверхностного заряда на поверхностях Ω_{n-1} и Ω_n . Кроме того, введены дополнительные обозначения:

$$D_{ab}^{pq} = \sum_n m_n^{pq} C_{ab}^{(n)}, \quad D_{cd} = \sum_n h_n C_{cd}^{(n)},$$

$$m_n^{pq} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N^-)^{2-p-q} (N^+)^{p+q} d\theta_3, \quad m_n^p = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N^-)^{1-p} (N^+)^p d\theta_3, \quad (22)$$

$$k_n^{pq} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N_n^-)^{2-p-q} (N_n^+)^{p+q} d\theta_3, \quad k_n^p = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N_n^-)^{1-p} (N_n^+)^p d\theta_3 = \frac{1}{2} h_n,$$

$$l_n^{pq} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N^-)^{1-p} (N^+)^p (N_n^-)^{1-q} (N_n^+)^q d\theta_3,$$

где $a, b = 1, 2, 3, 6$; $c, d = 4, 5$; $p, q = 0, 1$.

Замечание 1. В вариационном уравнении (20) независимыми функциональными переменными являются \mathbf{v} , $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, \mathbf{H} , $\boldsymbol{\chi}$. Вектор деформаций $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и вектор напряженности электрического поля $\tilde{\mathbf{E}}$ — зависимые величины, поэтому их вариации находим по формулам

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \mathbf{v}} \delta \mathbf{v}, \quad \delta \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \varphi} \delta \varphi. \quad (23)$$

Отметим также, что вектор смещения электрического поля $\mathbf{D}^{(l)}$ исключен из вариационного уравнения Ху—Васидзу (20), что позволяет упростить конечно-элементную формулировку.

Замечание 2. В случае стационарных процессов теории термопьезоэлектричества уравнение теплопроводности не является связанным с остальными уравнениями [13]. Это дает возможность уменьшить число независимых переменных, полагая вектор Ψ заданным.

Геометрически точный гибридный элемент термопьезоэлектрической оболочки

Конечно-элементная формулировка для геометрически точного четырехузлового термопьезоэлектрического элемента оболочки основывается на простой и эффективной билинейной интерполяции перемещений, электрического потенциала и температуры:

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_r = [u_{1r}^- \ u_{2r}^- \ u_{3r}^- \ u_{1r}^+ \ u_{2r}^+ \ u_{3r}^+ \ u_{3r}^M]^T, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \sum_r N_r \boldsymbol{\chi}_r, \quad \boldsymbol{\chi}_r = [\varphi_{0r} \ \varphi_{1r} \ \dots \ \varphi_{Nr}]^T, \quad (25)$$

$$\Psi = \sum_r N_r \Psi_r, \quad \Psi_r = [\Theta_{0r} \ \Theta_{1r} \ \dots \ \Theta_{Nr}]^T, \quad (26)$$

где $N_r(\xi_1, \xi_2)$ — билинейные функции формы элемента; $\mathbf{v}_r, \boldsymbol{\chi}_r, \Psi_r$ — векторы перемещений, электрического потенциала и температуры в узлах элемента; индекс r обозначает номер узла и изменяется от 1 до 4.

Чтобы применить аналитическое интегрирование в пределах элемента, для вектора деформаций и вектора напряженности электрического поля также используем билинейные интерполяции [12, 15]

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_r N_r \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_r, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{P}_r) = \mathbf{B}_r^u \mathbf{U}, \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sum_r N_r \tilde{\mathbf{E}}_r, \quad \tilde{\mathbf{E}}_r = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{P}_r) = -\mathbf{B}_r^\varphi \Phi, \quad (28)$$

где $\mathbf{B}_r^u, \mathbf{B}_r^\Phi$ — постоянные на элементе матрицы размером 10×28 и $5N \times 4(N+1)$; \mathbf{U} — вектор узловых перемещений; Φ — вектор узловых значений электрического потенциала:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T, \quad \Phi = [\chi_1^T \ \chi_2^T \ \chi_3^T \ \chi_4^T]^T. \quad (29)$$

Для упрощения вычислительного процесса интерполяции (26)—(28) удобно представить в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r_1 r_2}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r_1 r_2} = \mathbf{B}_u^{r_1 r_2} \mathbf{U}, \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \tilde{\mathbf{E}}^{r_1 r_2}, \quad \tilde{\mathbf{E}}^{r_1 r_2} = -\mathbf{B}_\Phi^{r_1 r_2} \Phi, \quad (31)$$

$$\Psi = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \Psi^{r_1 r_2}, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{B}_u^{00} = \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u + \mathbf{B}_2^u + \mathbf{B}_3^u + \mathbf{B}_4^u), \quad \mathbf{B}_u^{01} = \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u + \mathbf{B}_2^u - \mathbf{B}_3^u - \mathbf{B}_4^u), \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_u^{10} = \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u - \mathbf{B}_2^u - \mathbf{B}_3^u + \mathbf{B}_4^u), \quad \mathbf{B}_u^{11} = \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u - \mathbf{B}_2^u + \mathbf{B}_3^u - \mathbf{B}_4^u).$$

Матрицы $\mathbf{B}_\Phi^{r_1 r_2}$ и столбцы $\Psi^{r_1 r_2}$ вычисляются аналогичным образом путем использования матриц \mathbf{B}_r^Φ и столбцов Ψ_r соответственно; индексы r_1, r_2 здесь и далее принимают значения 0 и 1.

Во избежание сдвигового и мембранного запыриания элемента оболочки и чтобы при этом не получить ложных энергетических мод, для независимо введенных деформаций и результирующих напряжений используем следующие аппроксимации [9, 15]:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r_1 r_2},$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{00} = [\hat{\varepsilon}_{11}^{-00} \ \hat{\varepsilon}_{11}^{+00} \ \hat{\varepsilon}_{22}^{-00} \ \hat{\varepsilon}_{22}^{+00} \ \hat{\varepsilon}_{33}^{-00} \ \hat{\varepsilon}_{33}^{+00} \ 2\hat{\varepsilon}_{12}^{-00} \ 2\hat{\varepsilon}_{12}^{+00} \ 2\hat{\varepsilon}_{13}^{M00} \ 2\hat{\varepsilon}_{23}^{M00}]^T, \quad (34)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{01} = [\hat{\varepsilon}_{11}^{-01} \hat{\varepsilon}_{11}^{+01} \hat{\varepsilon}_{33}^{-01} \hat{\varepsilon}_{33}^{+01} 2\hat{\varepsilon}_{13}^{M01}]^T, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{10} = [\hat{\varepsilon}_{22}^{-10} \hat{\varepsilon}_{22}^{+10} \hat{\varepsilon}_{33}^{-10} \hat{\varepsilon}_{33}^{+10} 2\hat{\varepsilon}_{23}^{M10}]^T, \quad (34)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{11} = [\hat{\varepsilon}_{33}^{-11} \hat{\varepsilon}_{33}^{+11}]^T,$$

$$\mathbf{H} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2},$$

$$\mathbf{H}^{00} = [H_{11}^{-00} H_{11}^{+00} H_{22}^{-00} H_{22}^{+00} H_{33}^{-00} H_{33}^{+00} H_{12}^{-00} H_{12}^{+00} H_{13}^{00} H_{23}^{00}]^T, \quad (35)$$

$$\mathbf{H}^{01} = [H_{11}^{-01} H_{11}^{+01} H_{33}^{-01} H_{33}^{+01} H_{13}^{01}]^T,$$

$$\mathbf{H}^{10} = [H_{22}^{-10} H_{22}^{+10} H_{33}^{-10} H_{33}^{+10} H_{23}^{10}]^T, \quad \mathbf{H}^{11} = [H_{33}^{-11} H_{33}^{+11}]^T,$$

где \mathbf{Q}^{00} — единичная матрица 10×10 ; $\mathbf{Q}^{01}, \mathbf{Q}^{10}$ — проективные матрицы 10×5 ; \mathbf{Q}^{11} — проективная матрица 10×2 [9, 15].

Подставляя интерполяции (24), (25), (30)—(32), (34), (35) в смешанное вариационное уравнение (20), применяя аналитическое интегрирование в пределах элемента и исключая независимо введенные деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r_1 r_2}$ и результирующие напряжения $\mathbf{H}^{r_1 r_2}$, получим уравнения равновесия элемента

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{u\theta} \\ \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_{\varphi\theta} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

где $\mathbf{K}_{uu}, \mathbf{K}_{u\varphi}, \mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ — механическая, пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы жесткости; \mathbf{F}_p — вектор поверхностных нагрузок; \mathbf{F}_q — вектор электрического нагружения, $\mathbf{F}_{u\theta}, \mathbf{F}_{\varphi\theta}$ — векторы температурного нагружения:

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_u^{r_1 r_2})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D}_{uu} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{B}_u^{r_1 r_2},$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_u^{r_1 r_2})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D}_{u\varphi} \mathbf{B}_\varphi^{r_1 r_2}, \quad \mathbf{K}_{\varphi u} = (\mathbf{K}_{u\varphi})^T, \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = - \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_\varphi^{r_1 r_2})^T \mathbf{D}_{\varphi\varphi} \mathbf{B}_\varphi^{r_1 r_2},$$

$$\mathbf{F}_{u\theta} = \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_u^{r_1 r_2})^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} (\mathbf{Q}^{r_1 r_2})^T \mathbf{D}_{u\theta} \Psi^{r_1 r_2}, \quad (37)$$

$$\mathbf{F}_{\varphi\theta} = - \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} (\mathbf{B}_\varphi^{r_1 r_2})^T \mathbf{D}_{\varphi\theta} \Psi^{r_1 r_2}.$$

Замечание 3. Для получения системы уравнений (36) не требуется численного обращения матриц, что нехарактерно для изопараметрического гибридного элемента оболочки. Отметим также использование аналитического интегрирования, что дополнительно обеспечивает вычислительную эффективность разработанного геометрически точного термопьезоэлектрического элемента оболочки.

Каждую поверхность раздела слоев можно рассматривать как активную (на которой известен электрический потенциал) или сенсорную (на которой электрический потенциал неизвестен). В соответствии с этим столбец Φ разделяется на активную Φ^a и сенсорную (свободную) Φ^s части, так что систему (36) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi}^s & \mathbf{K}_{u\varphi}^a \\ \mathbf{K}_{\varphi u}^s & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{ss} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{sa} \\ \mathbf{K}_{\varphi u}^a & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{as} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi^s \\ \Phi^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{u\theta} \\ \mathbf{F}_{\varphi\theta}^s \\ \mathbf{F}_q^a + \mathbf{F}_{\varphi\theta}^a \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi u}^s = (\mathbf{K}_{u\varphi}^s)^T, \quad \mathbf{K}_{\varphi u}^a = (\mathbf{K}_{u\varphi}^a)^T, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{as} = (\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{sa})^T,$$

где индексы s и a означают сенсорную и активную части соответствующих матриц. Чтобы не усложнять численный анализ [1, 3, 4], дополнительно принято $\mathbf{F}_q^s = \mathbf{0}$.

Далее используется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль. В результате получим глобальную систему линейных алгебраических уравнений, описывающую термоэлектроупругое состояние слоистой композитной оболочки:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{uu} \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^s \tilde{\Phi}^s = \tilde{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbf{F}}_{u\theta} - \tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^a \tilde{\Phi}^a, \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi u}^s \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{ss} \tilde{\Phi}^s = \tilde{\mathbf{F}}_{\varphi\theta}^s - \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{sa} \tilde{\Phi}^a, \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_q^a = \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi u}^a \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{as} \tilde{\Phi}^s + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{aa} \tilde{\Phi}^a - \tilde{\mathbf{F}}_{\varphi\theta}^a. \quad (41)$$

Из уравнения (40) выразим столбец

$$\tilde{\Phi}^s = (\tilde{K}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} (\tilde{F}_{\varphi\theta}^s - \tilde{K}_{\varphi u}^s \tilde{U} - \tilde{K}_{\varphi\varphi}^{sa} \tilde{\Phi}^a). \quad (42)$$

Подставляя столбец (42) в уравнение (39), получим разрешающее уравнение для нахождения глобального вектора перемещений

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_{uu} - \tilde{K}_{u\varphi}^s (\tilde{K}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} \tilde{K}_{\varphi u}^s] \tilde{U} = \tilde{F}_p + \tilde{F}_{u\theta} - \tilde{K}_{u\varphi}^s (\tilde{K}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} \tilde{F}_{\varphi\theta}^s + \\ + [\tilde{K}_{u\varphi}^s (\tilde{K}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} \tilde{K}_{\varphi\varphi}^{sa} - \tilde{K}_{u\varphi}^a] \tilde{\Phi}^a. \end{aligned} \quad (43)$$

На основе описанного численного алгоритма был разработан геометрически точный пространственный билинейный конечный элемент EG7P4, позволяющий решать связанные актюаторные и сенсорные задачи термоэлектроупругости для тонкостенных конструкций из слоистых композитов.

Численные результаты и их обсуждение

1. Рассмотрим шестислойную пластину, изготовленную из углепластика Т300/976 с направлением укладки слоев [0/45/-45]_s. Пластина шарнирно оперта вдоль сторон, параллельных оси Oy , а стороны, параллельные оси Ox , остаются свободными. На лицевых поверхностях пластины наклеено 30 квадратных накладок из пьезокерамики G1195. Геометрические параметры пластины (рис. 3—*a*): $a = 372$ мм, $b = 228$ мм, $h = 0,75$ мм, $h_{pzt} = 0,13$ мм [16]; механические константы углепластика — $E_1 = 150$ ГПа, $E_2 = E_3 = 9$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,3$, $G_{12} = G_{13} = 7,1$ ГПа, $G_{23} = 2,5$ ГПа, $\alpha_1 = -1,1 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\alpha_2 = \alpha_3 = 2,5 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹; механические и пьезоэлектрические константы пьезокерамики — $E_1 = E_2 = E_3 = 63$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 24,2$ ГПа, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 9 \cdot 10^{-7}$ К⁻¹, $d_{31} = d_{32} = 0,254$ нм/В, $d_{33} = 0,374$ нм/В, $d_{15} = d_{24} = 0,584$ нм/В, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 15,3$ нФ/м, $\epsilon_{33} = 15$ нФ/м. Пластина подвергается следующему температурному нагружению: 50 °С на верхней поверхности и -50 °С — на нижней при начальной температуре окружающей среды 20 °С. Пьезоэлектрические накладки на внутренней и внешней поверхностях пластины поляризованы в противоположных направлениях и электроды на поверхностях раздела накладок и пластины заземлены.

Задача моделировалась с помощью неравномерной сетки 16×10 геометрически точных элементов оболочки EG7P4. На рис. 3—*b* приведена зависимость поперечного перемещения центральной линии пластины $u_3^M(x, b/2)$ от продольной координаты x при отсутствии электрического воздействия, а также при воздействии электрических потенциалов 31 и 61 В, приложенных к электродам на внешних поверхностях накладок. Приведено

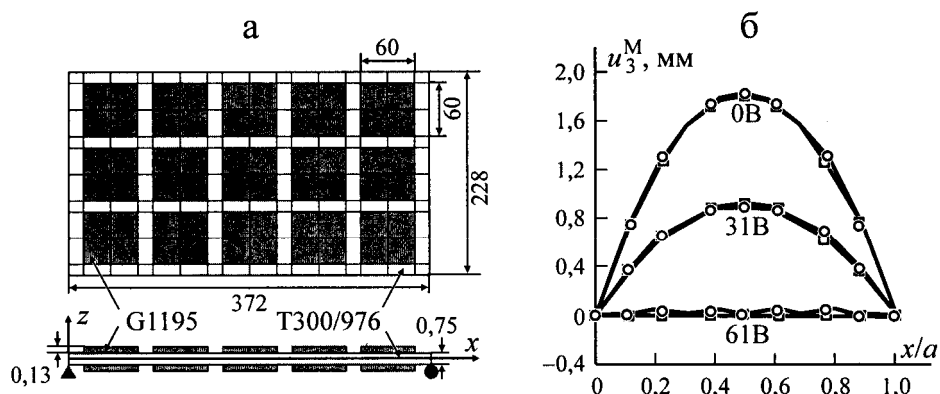


Рис. 3. Схема шарнирно опертой слоистой пластины с сегментированными пьезо-керамическими накладками: геометрия и конечно-элементная сетка (а) и распределение поперечного перемещения срединной плоскости $u_3^M(x, b/2)$ вдоль центральной линии пластины (б) на основе конечного элемента EG7P4 (○) и пространственной теории термопьезоэлектричества [16] (□). Размеры указаны в миллиметрах.

сравнение с результатами, полученными на основе трехмерного изопараметрического конечного элемента [16]. Как видим, полученные результаты хорошо согласуются с данными пространственной теории термопьезоэлектричества. Это свидетельствует о важности учета поперечного обжатия в задачах расчета тонкостенных композитных конструкций, подверженных термоэлектромеханическим воздействиям.

2. Далее исследуем сенсорную задачу электроупругости для однородной пьезокерамической цилиндрической оболочки, нагруженной на внешней поверхности Ω^+ вдоль двух диаметрально противоположных линий равномерно распределенной нагрузкой $p_3^+ = 656,17$ Н/м (рис. 4). Геометрические параметры оболочки соответствуют работе [17]: $R = 291$ мм, $l = 304,8$ мм, $h = 4$ мм. Механические и пьезоэлектрические константы пьезокерамики PZT-4 следующие [17]: $E_1 = E_2 = 81,3$ ГПа, $E_3 = 64,5$ ГПа, $\nu_{12} = 0,329$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0,432$, $G_{12} = 30,6$ ГПа, $G_{13} = G_{23} = 25,6$ ГПа, $e_{31} = e_{32} = -5,2$ Кл/м², $e_{33} = 15,08$ Кл/м², $e_{15} = e_{24} = 12,72$ Кл/м², $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 13,054$ нФ/м, $\epsilon_{33} = 11,505$ нФ/м. Пьезоэлектрик поляризован в поперечном направлении θ_3 и электроды на внутренней и внешней поверхностях оболочки заземлены. Очевидно, что расчет однородных оболочек с указанными граничными условиями на внешних поверхностях Ω^- и Ω^+ приводит согласно аппроксимации (8) к тривиальному решению для электрического потенциала, т.е. $\varphi = 0$ всюду в теле оболочки. Для корректного решения задачи оболочка разбивалась по толщине на четыре фиктивных слоя равной толщины $h_n = 1$ мм.

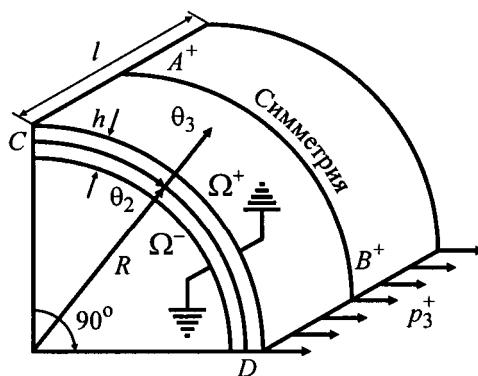


Рис. 4. Расчетная схема пьезокерамической замкнутой цилиндрической оболочки.

Вследствие симметрии задачи рассмотрена восьмая часть оболочки, которая моделировалась равномерными сетками геометрически точных билинейных элементов оболочки EG7P4. На рис. 5 показаны распределения поперечного перемещения u_3^M и электрического потенциала φ^M вдоль дуг AB и CD , принадлежащих срединной поверхности оболочки, полученные при использовании конечно-элементной сетки 2×24 . Представлено сравнение с результатами решения задачи с помощью пространственного изопараметрического квадратичного элемента оболочки [17] на основе дискретно-структурного подхода для случая $N = 4$. Как видно, соответствующие расчетные данные хорошо согласуются друг с другом. Дополнительная информация о сходимости геометрически точного элемента оболочки EG7P4 представлена в таблице. Данные таблицы свидетельствуют о возможности использования достаточно редких конечно-элементных сеток, что в свою очередь позволяет эффективно применять разработанный компьютерный код в контроллерах адаптивных конструкций.

3. Рассмотрим цилиндрический изгиб однородной пластины длиной l и толщиной h из пьезокерамики PZT-5A, жестко закрепленной на левом крае ($x = 0$) и шарнирно опертой или свободной на правом крае ($x = l$). Выберем следующие механические, пьезоэлектрические и температурные константы материала [18]: $C_{11} = C_{22} = 99,201$ ГПа, $C_{33} = 86,856$ ГПа, $C_{12} = 54,016$ ГПа, $C_{13} = C_{23} = 50,778$ ГПа, $C_{44} = C_{55} = 21,100$ ГПа, $C_{66} = 22,593$ ГПа, $e_{31} = e_{32} = -7,209$ Кл/м², $e_{33} = 15,118$ Кл/м², $e_{15} = e_{24} = 12,322$ Кл/м², $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 15,3$ нФ/м, $\epsilon_{33} = 15,0$ нФ/м, $\gamma_1 = \gamma_2 = 3,314 \cdot 10^5$ Па/К, $\gamma_3 = 3,260 \cdot 10^5$ Па/К, $g_3 = 7 \cdot 10^{-4}$ Кл/(К · м²). На нижней поверхности $z = -h/2$ поддерживается нулевая температура, т.е. $\Theta^- = 0$, на верхней поверхности $z = h/2$ поддерживается температура, распределенная по синусоидальному закону $\Theta^+ = \Theta_0 \sin(\pi x/l)$.

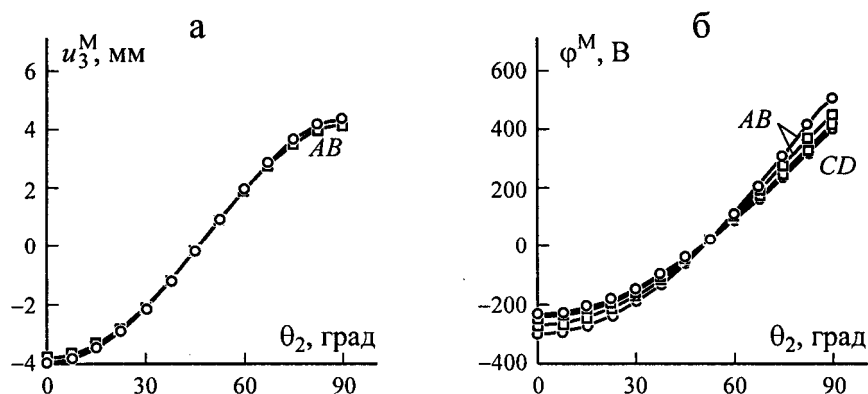


Рис. 5. Распределение поперечного перемещения срединной поверхности $u_3^M(l/2, \theta_2)$ вдоль центральной дуги AB (а) и электрических потенциалов на срединной поверхности $\varphi^M(l/2, \theta_2)$ вдоль центральной дуги AB и $\varphi^M(0, \theta_2)$ вдоль дуги CD на свободном крае (б) на основе конечного элемента EG7P4 (○) и пространственного изопараметрического элемента оболочки [17] (□) для пьезокерамической замкнутой цилиндрической оболочки.

Предполагается также, что температура распределена по толщине пластины согласно линейному закону, а электроды на обеих лицевых поверхностях заземлены, т.е. $\varphi^- = \varphi^+ = 0$.

На рис. 6, 7 приведены зависимости поперечного перемещения $\bar{u}_3 = u_3 / l \alpha_0 \Theta_0$ и электрического потенциала $\bar{\varphi} = e_0 \varphi / C_0 l \alpha_0 \Theta_0$ для некоторых значений параметра тонкостенности $S = l/h$ ($C_0 = 99,201$ ГПа, $e_0 = 7,209$ Кл/м², $\alpha_0 = 1,5 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹). Пластина моделировалась с помощью 20 конечных элементов, характеризующих плоское деформированное состояние пластины, и разбивалась по толщине на N слоев равной толщины для того, чтобы более точно описать пространственный характер распределения электрического потенциала в поперечном направлении. Рассмотрены

Значения поперечного перемещения и электрического потенциала на срединной поверхности в точке А

Параметр	Сетка							
	1 × 3	1 × 6	1 × 12	1 × 24	2 × 3	2 × 6	2 × 12	2 × 24
$-u_3^M(A)$, мм	3,074	3,667	3,831	3,873	3,126	3,734	3,901	3,944
$-10^{-2} \varphi^M(A)$, В	2,501	2,650	2,697	2,708	2,737	2,919	2,969	2,981

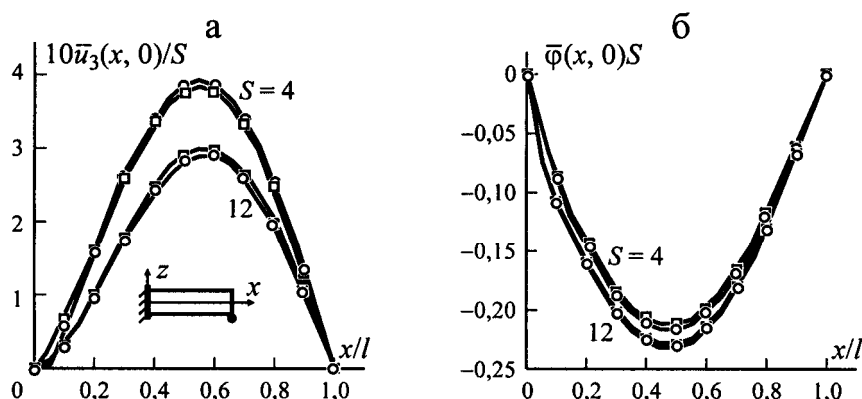


Рис. 6. Распределение поперечного перемещения (а) и электрического потенциала (б) в продольном направлении при $N = 8$ на основе конечного элемента EG7P4 (○) и точного решения плоской задачи термопьезоэлектричества [18] (□) для заземленной на левом крае и шарнирно опертой на правом крае пьезокерамической пластины.

случай $N = 2, 4$ и 8 . Сравнение с точным решением плоской задачи термоэлектроупругости [18] показывает, что разбиение достаточно толстых пластин на четыре и более слоев приводит к приемлемой для инженерных расчетов точности вычислений.

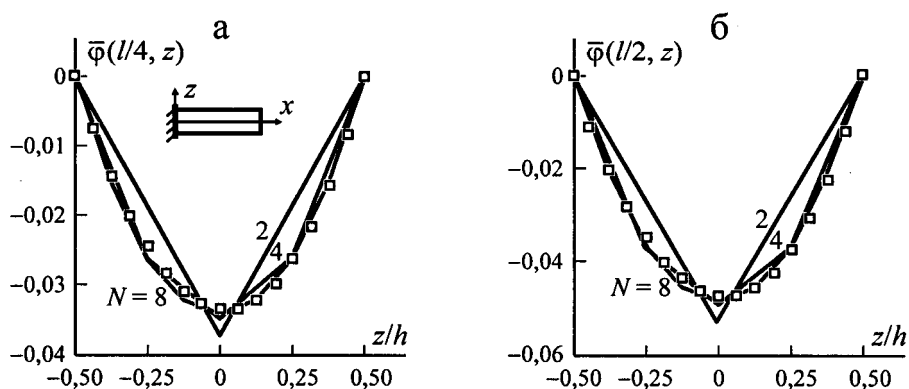


Рис. 7. Распределение электрического потенциала $\bar{\varphi}$ в поперечном направлении при $x = l/4$ (а) и $x = l/2$ (б) на основе конечного элемента EG7P4 (—) и точного решения плоской задачи термопьезоэлектричества [18] (□) для консольной пьезокерамической пластины при $S = 4$.

В последующей работе авторы намерены обобщить полученные результаты и использовать их для расчета слоистых пьезоэлектрических оболочек при наличии односторонних ограничений [19].

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/660).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sze K. Y., Yao L. Q., and Yi S.* A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II — Smart structure modelling // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 2000. — Vol. 48, No. 4. — P. 565—582.
2. *Lee S., Goo N. S., Park H. C., Yoon K. J., and Cho C.* A nine-node assumed strain shell element for analysis of a coupled electro-mechanical system // *Smart Mater. Struct.* — 2003. — Vol. 12, No. 3. — P. 355—362.
3. *Zheng S., Wang X., and Chen W.* The formulation of a refined hybrid enhanced assumed strain solid shell element and its application to model smart structures containing distributed piezoelectric sensors/actuators // *Smart Mater. Struct.* — 2004. — Vol. 13, No. 4. — P. N43—N50.
4. *Tan X. G. and Vu-Quoc L.* Optimal solid shell element for large-deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 2005. — Vol. 64, No. 15. — P. 1981—2013.
5. *Klinkel S. and Wagner W.* A geometrically non-linear piezoelectric solid shell element based on a mixed multi-field variational formulation // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 2006. — Vol. 65, No. 3. — P. 349—382.
6. *Lentzen S.* Nonlinearly coupled thermopiezoelectric modelling and FE-simulation of smart structures. *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 20, Nr. 419.* — Düsseldorf: VDI Verlag, 2009. — 218 S.
7. *Куликов Г. М.* Деформационные соотношения, точно представляющие большие перемещения оболочки как жесткого тела // *Механика твердого тела.* — 2004. — Т. 39, № 5. — С. 130—140.
8. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part II. Enhanced finite element technique // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2006. — Vol. 195, No. 19—22. — P. 2209—2230.
9. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Расчет композитных конструкций под действием следящих нагрузок с использованием геометрически точного элемента оболочки // *Механика композит. материалов.* — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 789—804.
10. *Kulikov G. M. and Carrera E.* Finite deformation higher-order shell models and rigid-body motions // *Int. J. Solids Struct.* — 2008. — Vol. 45, No. 11—12. — P. 3153—3172.
11. *Saravanos D. A.* Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures // *AIAA Journal.* — 1997. — Vol. 35, No. 8. — P. 1327—1333.
12. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Exact geometry piezoelectric solid-shell element based on the 7-parameter model // *Mech. Advanced Mater. Struct.* — 2010. — Vol. 17 (in print).
13. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. — М.: Мир, 1986. — 160 с.
14. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Geometrically exact four-node piezoelectric solid-shell element // *Mech. Advanced Mater. Struct.* — 2008. — Vol. 15, No. 3—4. — P. 199—207.

15. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom // *Comput. Model. Eng. Sci.* — 2008. — Vol. 28, No. 1. — P. 15—38.

16. *Ha S. K., Keilers C., and Chang F.-K.* Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators // *AIAA Journal.* — 1992. — Vol. 30, No. 3. — P. 772—780.

17. *Heyliger P., Pei K. C., and Saravanos D.* Layerwise mechanics and finite element model for laminated piezoelectric shells // *AIAA Journal.* — 1996. — Vol. 34, No. 11. — P. 2353—2360.

18. *Vel S. S. and Batra R. C.* Generalized plane strain thermopiezoelectric analysis of multilayered plates // *J. Thermal Stresses.* — 2003. — Vol. 26, No. 4. — P. 353—377.

19. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Контактное взаимодействие композитных оболочек с жестким выпуклым основанием, подверженных действию следящих нагрузок // *Механика композит. материалов.* — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 61—78.

Поступила в редакцию 19.05.2010

Received May 19, 2010
