

Г. М. Куликов, С. В. Плотникова*

Тамбовский государственный технический университет, Россия

**РАСЧЕТ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ
МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МЕТОДА
ОТСЧЕТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

G. M. Kulikov and S. V. Plotnikova*

**THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF METAL-CERAMIC SHELLS
BY THE METHOD OF SAMPLING SURFACES**

Keywords: metal-ceramic shell, elasticity theory, method of sampling surfaces

An efficient method for solving three-dimensional elasticity problems for metal-ceramic composite shells is presented. According to this method, in the body of a shell, N sampling surfaces (SaS) parallel to its midsurface are chosen in order to introduce the displacement vectors of these surfaces as unknown functions. The SaS pass through the nodes of a Chebyshev polynomial, which improves the convergence of the SaS method significantly. As a result, this method can be applied to the derivation of such analytical solutions for metal-ceramic shells that asymptotically approach the exact three-dimensional solutions of elasticity as the number N of SaS tends to infinity.

Ключевые слова: оболочка металлокерамическая, теория упругости, метод отсчетных поверхностей

Рассмотрен эффективный метод решения трехмерных задач теории упругости для металлокерамических композитных оболочек. Согласно этому методу внутри оболочки выбирают N отсчетных поверхностей, параллельных срединной поверхности, для того чтобы ввести векторы перемещений этих поверхностей в качестве искомых функций. Отсчетные поверхности проходят через узлы полинома Чебышева, что существенно улучшает сходимость метода отсчетных поверхностей. В результате этот метод

*Автор, с которым следует вести переписку: gmkulikov@mail.ru
Corresponding author: gmkulikov@mail.ru

может быть применен к получению аналитических решений для металлокерамических оболочек, которые асимптотически приближаются к точным решениям пространственной теории упругости при стремлении числа отсчетных поверхностей к бесконечности.

Введение

В литературе известно несколько подходов к нахождению точных решений теории упругости для металлокерамических композитных пластин и оболочек. Первый подход основан на применении асимптотических методов [1, 2], второй связан с использованием степенных рядов в пространственных аппроксимациях искомых функций и упругих постоянных [3—5]. Современное состояние проблемы обсуждено в обзорах [6, 7].

Альтернативный подход связан с введением в теле оболочки N отсчетных поверхностей $\Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^N$, параллельных срединной поверхности, с целью использования векторов перемещений $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^N$ этих поверхностей в качестве искомых функций [8, 9]. Такой выбор искомых функций с последующим применением полиномов Лагранжа степени $N - 1$ в пространственных аппроксимациях перемещений позволяет представить разрешающие уравнения предложенной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и построить деформационные соотношения, точно представляющие перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат [10]. Отметим, что теория оболочек второго порядка с использованием трех отсчетных поверхностей построена в работе [11].

Теория оболочек высокого порядка [8] основана на использовании эквидистантных отсчетных поверхностей. При этом лицевые поверхности оболочки выбирают в качестве отсчетных. Это ограничивает применение данной теории для расчета толстых оболочек. Дело в том, что предложенная пространственная полиномиальная интерполяция вектора перемещений с использованием полиномов Лагранжа высокой степени может приводить вследствие феномена Рунге к значительной осцилляции полиномиальных аппроксимаций в зоне краевого эффекта. Этот феномен был открыт Рунге [12] при изучении погрешности полиномиальной интерполяции для приближения некоторых функций на равномерной сетке. С повышением степени полинома погрешность интерполяции может стремиться к бесконечности. В численном анализе для борьбы с указанным явлением в качестве узлов интерполяции принято использовать корни многочлена Чебышева [13], что помогает существенно улучшить поведение полиномиальных аппроксимаций высокой степени, для которых ошибка интерполяции равномерно стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Это дает возможность находить решение трехмерных задач статики для композитных оболочек [14—16] с любой наперед заданной точностью, учитывая, что полученные аналитические решения *асимптотически приближаются* к точным решениям пространственной теории упругости.

Кинематика оболочки и деформационные соотношения

Рассмотрим оболочку постоянной толщины h . Отнесем срединную поверхность Ω к криволинейным ортогональным координатам θ_1, θ_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн, а координату θ_3 будем отсчитывать в поперечном направлении. Пусть \mathbf{e}_α — единичные векторы касательных к координатным линиям θ_α ; \mathbf{e}_3 — единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности; A_α — коэффициенты первой квадратичной формы; k_α — главные кривизны; $c_\alpha = 1 + k_\alpha \theta_3$ — компоненты геометрического тензора сдвига; $c_\alpha^I = c_\alpha(\theta_3^I) = 1 + k_\alpha \theta_3^I$ — компоненты геометрического тензора сдвига на отсчетных поверхностях Ω^I (рис. 1); θ_3^I — поперечные координаты поверхностей Ω^I , которые располагаются внутри интервала $(-h/2, h/2)$ в узлах полинома Чебышева степени N и определяются согласно формуле [13]:

$$\theta_3^I = -\frac{h}{2} \cos\left(\pi \frac{2I-1}{2N}\right). \quad (1)$$

Здесь и далее индексы I, J, K указывают на принадлежность некоторой величины к отсчетной поверхности и принимают значения $1, 2, \dots, N$; греческие индексы $\alpha, \beta = 1, 2$; латинские индексы $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Отметим, что в работе применяется соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам.

Компоненты тензора деформаций на отсчетных поверхностях можно записать в векторной форме [10]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\theta_3^I) = \frac{1}{A_\alpha c_\alpha^I} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{A_\beta c_\beta^I} \mathbf{u}_{,\beta}^I \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad (2)$$

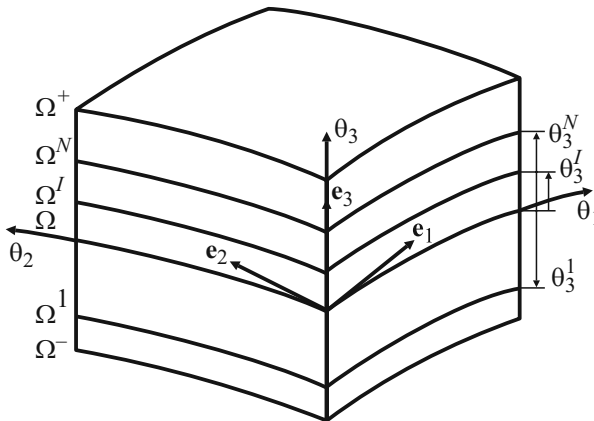


Рис. 1. Схема расположения отсчетных поверхностей в оболочке.

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^I = 2\varepsilon_{\alpha 3}(\theta_3^I) = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha c_\alpha^I} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_3, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{33}^I = \varepsilon_{33}(\theta_3^I) = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{u}^I = \mathbf{u}(\theta_3^I)$ и $\boldsymbol{\beta}^I = \mathbf{u}_{,3}(\theta_3^I)$ — векторы перемещений отсчетных поверхностей и значения производной вектора перемещений по координате θ_3 на поверхностях Ω^I .

Представим далее векторы \mathbf{u}^I , $\boldsymbol{\beta}^I$ в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{u}^I = u_i^I \mathbf{e}_i, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\beta}^I = \beta_i^I \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

Дифференцируя (3) по поперечной координате θ_3 и учитывая формулы дифференцирования базисных векторов \mathbf{e}_i по криволинейным ортогональным координатам [10], получим

$$\mathbf{u}_{,\alpha}^I = A_\alpha \lambda_{i\alpha}^I \mathbf{e}_i, \quad (5)$$

где

$$\lambda_{\alpha\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{,\alpha}^I + B_\alpha u_\beta^I + k_\alpha u_3^I, \quad \lambda_{\beta\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha}^I - B_\alpha u_\alpha^I \quad (\beta \neq \alpha), \quad (6)$$

$$\lambda_{3\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^I - k_\alpha u_\alpha^I, \quad B_\alpha = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta} \quad (\beta \neq \alpha).$$

Вводя разложения (4), (5) в (2), приходим к скалярной форме деформационных соотношений

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{c_\beta^I} \lambda_{\alpha\beta}^I + \frac{1}{c_\alpha^I} \lambda_{\beta\alpha}^I, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \beta_\alpha^I + \frac{1}{c_\alpha^I} \lambda_{3\alpha}^I, \quad \varepsilon_{33}^I = \beta_3^I. \quad (7)$$

До этого момента не было сделано никаких предположений о характере распределения полей перемещений и деформаций по толщине оболочки. Теперь предположим, что перемещения и деформации распределены в поперечном направлении согласно следующему закону [8]:

$$u_i = \sum_I L^I u_i^I, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \sum_I L^I \varepsilon_{ij}^I, \quad (9)$$

где $L^I(\theta_3)$ — полиномы Лагранжа степени $N-1$, определяемые по формуле

$$L^I = \prod_{J \neq I} \frac{\theta_3 - \theta_3^J}{\theta_3^I - \theta_3^J}. \quad (10)$$

Из соотношений (8) находим

$$\beta_i^I = \sum_J M^J(\theta_3^I) u_i^J, \quad (11)$$

где $M^J = L_3^J$ — полиномы степени $N - 2$; их значения на отсчетных поверхностях Ω^I находим по формулам

$$M^J(\theta_3^I) = \frac{1}{\theta_3^J - \theta_3^I} \prod_{K \neq I, J} \frac{\theta_3^I - \theta_3^K}{\theta_3^J - \theta_3^K} \quad (J \neq I), \quad (12)$$

$$M^I(\theta_3^I) = - \sum_{J \neq I} M^J(\theta_3^I).$$

Как видим, определяющие функции данной теории оболочек высокого порядка β_i^I представлены согласно (11) в виде линейной комбинации перемещений отсчетных поверхностей u_i^J .

Отметим, что деформационные соотношения (6), (7), (11) точно представляют перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат. Доказательство этого фундаментального утверждения представлено в работе [10].

Вариационная формулировка задачи

Принцип минимума потенциальной энергии оболочки в случае консервативного нагружения имеет вид

$$\delta \Pi = 0, \quad (13)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} A_1 A_2 c_1 c_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 - W, \quad (14)$$

$$W = \iint_{\Omega} \left(c_1^+ c_2^+ p_i^+ u_i^+ - c_1^- c_2^- p_i^- u_i^- \right) A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 + W_{\Sigma}, \quad (15)$$

где Π — полная потенциальная энергия оболочки; σ_{ij} — напряжения; p_i^-, p_i^+ — поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях оболочки Ω^-, Ω^+ ; $u_i^- = u_i(-h/2)$, $u_i^+ = u_i(h/2)$ — перемещения лицевых поверхностей оболочки; $c_{\alpha}^- = 1 - k_{\alpha} h/2$, $c_{\alpha}^+ = 1 + k_{\alpha} h/2$ — компоненты тензора сдвига на лицевых поверхностях; W_{Σ} — работа внешних

нагрузок, действующих на боковой поверхности Σ .

Подставляя распределение деформаций в поперечном направлении (9) в функционал (14) и вводя результирующие напряжений

$$H_{ij}^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} L^I c_1 c_2 d\theta_3, \quad (16)$$

получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_I H_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 - W. \quad (17)$$

Ограничимся рассмотрением линейно-упругих материалов, для которых применимы соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (18)$$

где C_{ijkl} — упругие модули оболочки.

Следующий шаг заключается в выборе закона распределения упругих постоянных по толщине оболочки. Очевидно, что их распределение в поперечном направлении должно быть согласовано с распределением перемещений и деформаций (8), (9), т. е. имеем

$$C_{ijkl} = \sum_I L^I C_{ijkl}^I, \quad (19)$$

где $C_{ijkl}^I = C_{ijkl}(\theta_3^I)$ — значения упругих модулей на отсчетных поверхностях.

Вводя напряжения (18) в (16) и учитывая распределения деформаций и упругих постоянных по толщине оболочки (9), (19), приходим к формуле для вычисления результирующих напряжений

$$H_{ij}^I = \sum_{J,K} \Lambda^{JK} C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^K, \quad (20)$$

где

$$\Lambda^{JK} = \int_{-h/2}^{h/2} L^I L^J L^K c_1 c_2 d\theta_3. \quad (21)$$

Упругие постоянные металлокерамического композита

Рассмотрим композит с металлической матрицей и случайно ориентированными дискретными керамическими включениями, выполняющими функции армирующих элементов. Для модулей Юнга, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона металла и керамики используем общепринятые обозначения: E_m , G_m , ν_m и E_c , G_c , ν_c .

Полагаем, что керамические включения имеют эллипсоидальную форму. Поэтому для определения эффективных упругих модулей металлокерамического композита можно использовать метод Мори—Танака [17, 18]:

$$K = K_m + \frac{V_c(K_c - K_m)}{1 + V_m(K_c - K_m)/(K_m + 4G_m/3)},$$

$$G = G_m + \frac{V_c(G_c - G_m)}{1 + V_m(G_c - G_m)/(G_m + f_m)}, \quad f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)}, \quad (22)$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}, \quad K_c = \frac{E_c}{3(1 - 2\nu_c)},$$

где K_m, K_c — объемные модули упругости металла и керамики; V_m, V_c — объемное содержание металла и керамики, изменяющееся по толщине оболочки согласно следующему закону [3]:

$$V_m = 1 - V_c, \quad V_c = V_c^- + (V_c^+ - V_c^-)(h/2 + \theta_3)^{\gamma}, \quad (23)$$

где V_c^-, V_c^+ — объемное содержание керамики на лицевых поверхностях оболочки.

Численные результаты и их обсуждение

1. В качестве первого примера рассмотрим металлокерамическую шарнирно опертую прямоугольную пластину, нагруженную синусоидально распределенной по верхней поверхности нагрузкой

$$p_3^+ = p_0 \sin \frac{\pi\theta_1}{a} \sin \frac{\pi\theta_2}{b}, \quad p_3^- = 0, \quad (24)$$

где $p_0 = 1$ Па.

Граничные условия для прямоугольной пластины с шарнирно опертыми кромками имеют вид

$$\sigma_{11} = u_2 = u_3 = 0 \text{ при } \theta_1 = 0, \theta_1 = a, \quad (25)$$

$$\sigma_{22} = u_1 = u_3 = 0 \text{ при } \theta_2 = 0, \theta_2 = b.$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (25), решение задачи будем искать в форме

$$u_1^I = u_{10}^I \cos \frac{\pi\theta_1}{a} \sin \frac{\pi\theta_2}{b}, \quad u_2^I = u_{20}^I \sin \frac{\pi\theta_1}{a} \cos \frac{\pi\theta_2}{b},$$

$$u_3^I = u_{30}^I \sin \frac{\pi\theta_1}{a} \sin \frac{\pi\theta_2}{b}. \quad (26)$$

Подставляя нагрузку (24) и перемещения (26) в формулу для полной потенциальной энергии (15), (17) и учитывая соотношения (6), (7), (11), (20), получим

$$\Pi = \Pi(u_{i0}^I). \quad (27)$$

Применяя принцип минимума потенциальной энергии (13), (27), приходим к системе линейных алгебраических уравнений порядка $3N$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{i0}^I} = 0, \quad (28)$$

которая решается методом Гаусса.

Описанный алгоритм был реализован в среде программирования MATLAB с использованием пакета ToolBox Symbolic Math, позволяющего выполнять символьные вычисления. В результате получено аналитическое решение задачи изгиба металлокерамической прямоугольной пластины на основе данной теории оболочек высокого порядка.

Для сравнения полученных результатов с аналитическим решением трехмерной задачи теории упругости [3] примем $a = b = 1$ м, $E_m = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_m = 0,3$, $E_c = 4,27 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_c = 0,17$, $V_c^- = 0$, $V_c^+ = 0,5$, $\gamma = 2$ и введем безразмерные величины

$$U_1 = 100h^2 E_m u_1(0, a/2, z) / a^3 p_0, \quad U_3 = 100h^3 E_m u_3(a/2, a/2, z) / a^4 p_0,$$

$$S_{11} = 10h^2 \sigma_{11}(a/2, a/2, z) / a^2 p_0, \quad S_{12} = 10h^2 \sigma_{12}(0, 0, z) / a^2 p_0,$$

$$S_{13} = 10h \sigma_{13}(0, a/2, z) / a p_0, \quad S_{33} = \sigma_{33}(a/2, a/2, z) / p_0, \quad z = \theta_3 / h.$$

Из данных табл. 1, 2 видно, что при надлежащем выборе отсчетных поверхностей можно добиться хорошего согласования расчетных данных с аналитическим решением [3] даже для толстых металлокерамических пластин. Как оказалось, выбор девяти отсчетных поверхностей позволяет получить численные результаты с совпадением всех пяти значащих цифр для перемещений и напряжений из работы [3]. Отметим также, что дальнейшее увеличение отсчетных поверхностей до 19 увеличивает количество правильных значащих цифр до 11 для нормальных напряжений и до 15 — для поперечных касательных напряжений в случае $a/h = 5$.

2. Во втором примере изучим изгиб металлокерамической шарнирно опертой цилиндрической оболочки радиусом R и длиной L . Срединную поверхность оболочки отнесем к криволинейным координатам θ_1 и θ_2 , отсчитываемым в меридиональном и окружном направлениях. Пусть оболочка нагружается синусоидально распределенной по внешней поверхности нагрузкой

Табл. 1

Результаты расчета металлокерамической квадратной пластины при $a/h = 5$

N	$U_1(0,5)$	$U_3(0,5)$	$S_{11}(0,5)$	$S_{12}(0,5)$	$S_{13}(0)$	$S_{33}(0,25)$
3	-2,838340262398618	2,491469749603327	2,501382580630834	-1,396928304286311	1,590619403769780	0,7124999023164764
7	-2,912908134299325	2,555878887142974	2,755727774481453	-1,559557127193362	2,310138127165216	0,8099883632143655
11	-2,9129182233124032	2,555881463601872	2,756212114487591	-1,559952113334130	2,310019719768843	0,8100152119426805
15	-2,912918241237284	2,555881465062731	2,756213284948613	-1,559953146848270	2,310019478367794	0,8100148488194952
19	-2,912918241248020	2,555881465064410	2,756213287523302	-1,559953149637165	2,310019478154247	0,8100148486775266
23	-2,912918241247832	2,555881465064128	2,756213287528492	-1,559953149644632	2,310019478154246	0,8100148486802695
[3]	-2,9129	2,5559	2,7562	-1,5600	2,3100	0,8100

Табл. 2

Результаты расчета металлокерамической квадратной пластины при $a/h = 10$

N	$U_1(0,5)$	$U_3(0,5)$	$S_{11}(0,5)$	$S_{12}(0,5)$	$S_{13}(0)$	$S_{33}(0,25)$
3	-2,875130378136801	2,202396920585996	2,412841121703996	-1,420413278358082	1,6013225513211140	0,7367643589818127
7	-2,899724811688270	2,214798606780433	2,641956852342622	-1,552565106480717	2,323954032297057	0,8117297257693006
11	-2,899733978942651	2,214801182167397	2,642395937995539	-1,552891720288181	2,323921893370359	0,8123146819945828
15	-2,899733986752316	2,214801183896660	2,642396888131435	-1,552892592322280	2,323921660091405	0,8123134893082843
19	-2,899733986762826	2,214801183898813	2,642396890147046	-1,552892594687380	2,323921659883698	0,8123134883311503
23	-2,899733986762623	2,214801183898711	2,642396890150937	-1,552892594693696	2,323921659883744	0,8123134883405911
[3]	-2,8997	2,2148	2,6424	-1,5529	2,3239	0,8123

$$p_3^+ = p_0 \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \cos \theta_2, \quad p_3^- = 0, \quad (29)$$

где $p_0 = 1$ Па.

Граничные условия для цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми кромками имеют вид

$$\sigma_{11} = u_2 = u_3 = 0 \text{ при } \theta_1 = 0, \theta_1 = L. \quad (30)$$

Решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям (30), будем искать в виде

$$u_1^I = u_{10}^I \cos \frac{\pi \theta_1}{L} \cos \theta_2, \quad u_2^I = u_{20}^I \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \sin \theta_2, \quad u_3^I = u_{30}^I \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \cos \theta_2. \quad (31)$$

Подставляя нагрузку (29) и перемещения (31) в формулу для полной потенциальной энергии (15), (17) и применяя принцип минимума потенциальной энергии (13), приходим снова к системе линейных алгебраических уравнений (28), которая решается методом Гаусса.

Описанный алгоритм был реализован в среде программирования MATLAB с использованием пакета ToolBox Symbolic Math, позволяющего выполнять символьные вычисления. В результате получено аналитическое решение задачи для металлокерамической цилиндрической оболочки на основе построенной теории оболочек высокого порядка.

Полагаем, что оболочка изготовлена из металлокерамического композита, механические характеристики которого даны в предыдущем примере. Далее примем $R=1$ м, $L=4$ м, $V_c^- = 0$, $V_c^+ = 0,5$, $\gamma = 2$ и введем следующие безразмерные величины:

$$U_1 = hE_m u_1(0, 0, z) / R^2 p_0, \quad U_2 = hE_m u_2(L/2, \pi/2, z) / R^2 p_0, \\ U_3 = hE_m u_3(L/2, 0, z) / R^2 p_0,$$

Табл. 3

Результаты расчета металлокерамической цилиндрической оболочки при $R/h = 2$

N	$U_1(0,5)$	$U_2(0,5)$	$U_3(0,5)$	$S_{11}(0,5)$	$S_{22}(0,5)$	$S_{12}(0,5)$	$S_{13}(0)$	$S_{23}(0)$	$S_{33}(0)$
3	-2,142	-4,965	5,418	4,055	1,933	-1,833	5,322	-3,128	0,4697
7	-2,152	-4,985	5,437	4,239	1,973	-1,870	7,795	-4,259	0,4719
11	-2,152	-4,985	5,437	4,239	1,973	-1,870	7,795	-4,254	0,4719
15	-2,152	-4,985	5,437	4,239	1,973	-1,870	7,795	-4,253	0,4719
19	-2,152	-4,985	5,437	4,239	1,973	-1,870	7,795	-4,252	0,4719
23	-2,152	-4,985	5,437	4,239	1,973	-1,870	7,795	-4,252	0,4719

Табл. 4

Результаты расчета металлокерамической цилиндрической оболочки при $R/h = 10$

N	$U_1(0,5)$	$U_2(0,5)$	$U_3(0,5)$	$S_{11}(0,5)$	$S_{22}(0,5)$	$S_{12}(0,5)$	$S_{13}(0)$	$S_{23}(0)$	$S_{33}(0)$
3	-1,505	-4,925	5,352	2,868	1,602	-2,027	4,342	0,5370	0,5771
7	-1,505	-4,938	5,365	2,969	1,647	-2,084	6,965	0,4308	0,4284
11	-1,505	-4,938	5,365	2,969	1,647	-2,084	6,965	0,4313	0,4282
15	-1,505	-4,938	5,365	2,969	1,647	-2,084	6,965	0,4314	0,4282
19	-1,505	-4,938	5,365	2,969	1,647	-2,084	6,965	0,4314	0,4282

$$S_{11} = h\sigma_{11}(L/2, 0, z) / Rp_0, \quad S_{22} = h\sigma_{22}(L/2, 0, z) / Rp_0,$$

$$S_{12} = h\sigma_{12}(0, \pi/2, z) / Rp_0, \quad S_{13} = 10R\sigma_{13}(0, 0, z) / hp_0,$$

$$S_{23} = 100\sigma_{23}(L/2, \pi/2, z) / p_0, \quad S_{33} = \sigma_{33}(L/2, 0, z) / p_0, \quad z = \theta_3 / h.$$

Из данных табл. 3, 4 видно, что выбор семи отсчетных поверхностей (в отдельных случаях достаточно пяти) приводит к четырем правильным значащим цифрам для всех функций за исключением поперечных касательных напряжений S_{23} , для которых требуется большее число отсчетных поверхностей. Распределение перемещений и напряжений по толщине оболочки, показанное на рис. 2, 3 в случае выбора 11 отсчетных поверхностей для оболочек с разными значениями параметра R/h , также свидетельствует о высоком потенциале предложенной теории для расчета в пространственной постановке металлокерамических оболочек. Как видим, граничные условия на лицевых поверхностях оболочки для

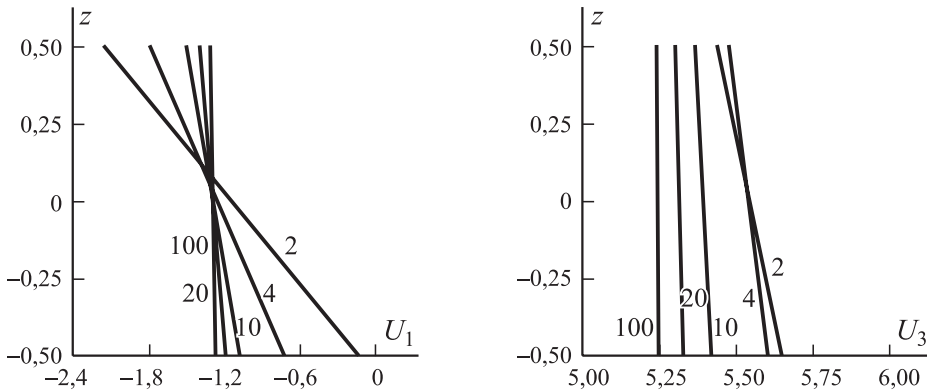


Рис. 2. Распределение перемещений U_1 и U_3 по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при разных значениях R/h (цифры у кривых).

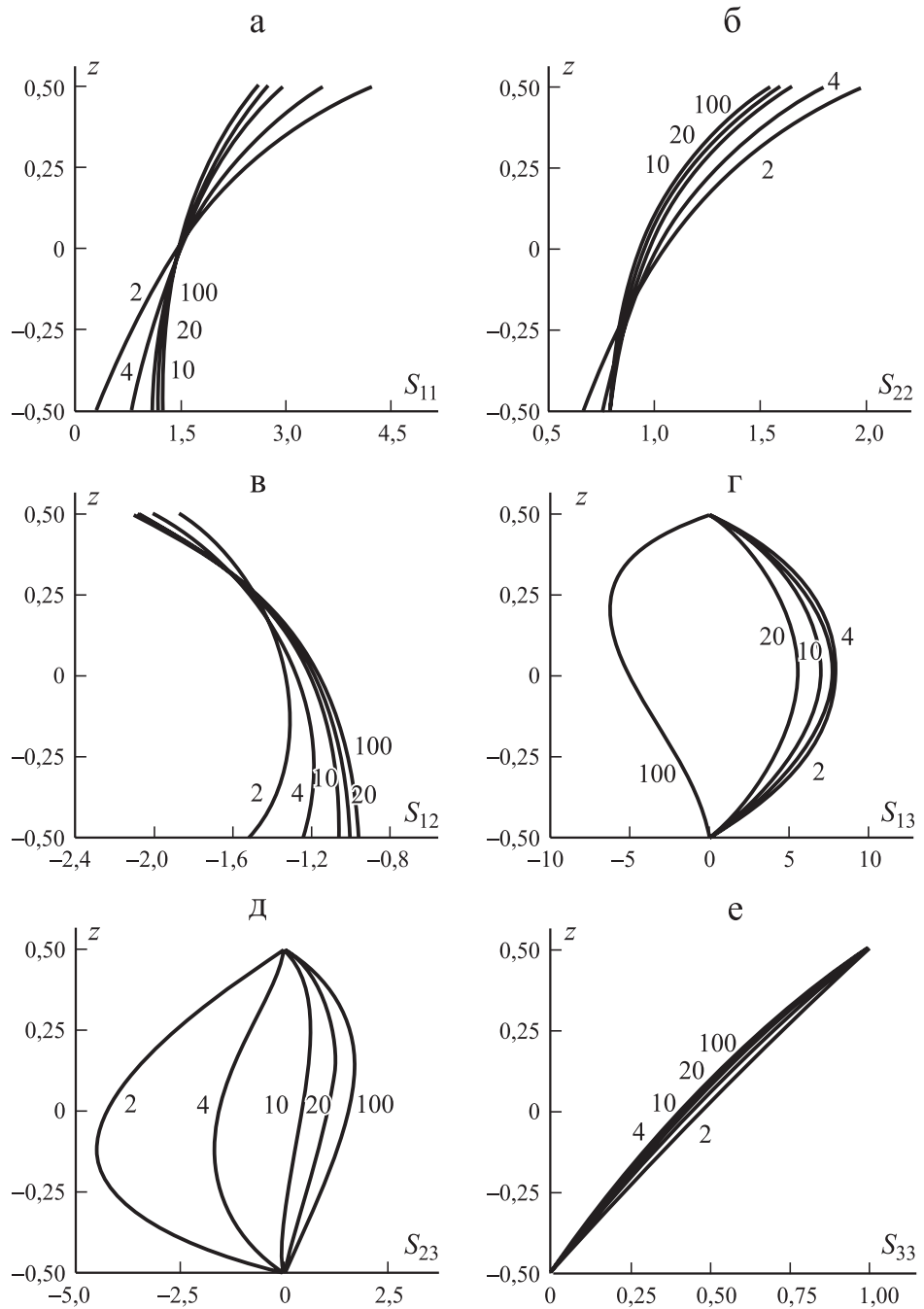


Рис. 3. Распределение напряжений S_{11} , S_{22} , S_{12} , S_{13} , S_{23} и S_{33} по толщине металлокерамической цилиндрической оболочки при разных значениях R/h (цифры у кривых).

поперечных компонент тензора напряжений удовлетворяются с достаточно высокой точностью.

Заключение

Предложен новый метод решения пространственных задач теории упругости для толстых и тонких оболочек из функциональных материалов. Согласно этому методу внутри тела оболочки вводят расположенные в узлах многочлена Чебышева отсчетные поверхности с целью выбора векторов перемещений этих поверхностей в качестве искомых функций. Это дало возможность находить решение трехмерных задач статики для металлокерамических композитных оболочек с любой наперед заданной точностью, так как полученные аналитические решения асимптотически приближаются к точным решениям пространственной теории упругости.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проекты № 9.137.2014К и № 339.2014) и Российского научного фонда (проект № 15-19-30002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheng Z. Q. and Batra R. C.* Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate // *Composites: Part B.* — 2000. — Vol. 31. — P. 97—106.
2. *Reddy J. N. and Cheng Z. Q.* Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates // *Europ. J. Mech. A/Solids.* — 2001. — Vol. 20. — P. 841—855.
3. *Vel S. S. and Batra R. C.* Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates // *AIAA J.* — 2002. — Vol. 40. — P. 1421—1433.
4. *Pelletier J. L. and Vel S. S.* An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells // *Int. J. Solids Struct.* — 2006. — Vol. 43. — P. 1131—1158.
5. *Vel S. S.* Exact thermoelastic analysis of functionally graded anisotropic hollow cylinders with arbitrary material gradation // *Mech. Advanced Mater. Struct.* — 2011. — Vol. 18. — P. 14—31.
6. *Birman V. and Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* — 2007. — Vol. 60. — P. 195—216.
7. *Jha D. K., Kant T., and Singh R. K.* A critical review of recent research on functionally graded plates // *Composite Struct.* — 2013. — Vol. 96. — P. 833—849.
8. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Решение задачи статики для упругой оболочки в пространственной постановке // *Докл. РАН.* — 2011. — Т. 439, № 5. — С. 613—616.
9. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Метод решения трехмерных задач теории упругости для слоистых композитных пластин // *Механика композит. материалов.* — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 23—36.
10. *Куликов Г. М., Плотникова С. В.* Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсчетных поверхностей // *Механика твердого тела.* — 2014. — № 4. — С. 54—64.

11. *Kulikov G. M.* Refined global approximation theory of multilayered plates and shells // *J. Eng. Mech.* — 2001. — Vol. 127. — P. 119—125.

12. *Runge C.* Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten // *Z. Math. Physik.* — 1901. — Bd 46. — S. 224—243.

13. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 631 с.

14. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* On the use of sampling surfaces method for solution of 3D elasticity problems for thick shells // *ZAMM. — J. Appl. Math. Mech.* — 2012. — Vol. 92. — P. 910—920.

15. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* Advanced formulation for laminated composite shells: 3D stress analysis and rigid-body motions // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 95. — P. 236—246.

16. *Kulikov G. M. and Plotnikova S. V.* 3D exact thermoelastic analysis of laminated composite shells via sampling surfaces method // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 115. — P. 120—130.

17. *Mori T. and Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metallurgica.* — 1973. — Vol. 21. — P. 571—574.

18. *Benveniste Y.* A new approach to the application of Mori—Tanaka's theory in composite materials // *Mech. Mater.* — 1987. — Vol. 6. — P. 147—157.

Поступила в редакцию 16.09.2014

Received Sept. 16, 2014
