

**ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ТОЧНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ
БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБОЛОЧКИ КАК ЖЕСТКОГО ТЕЛА**

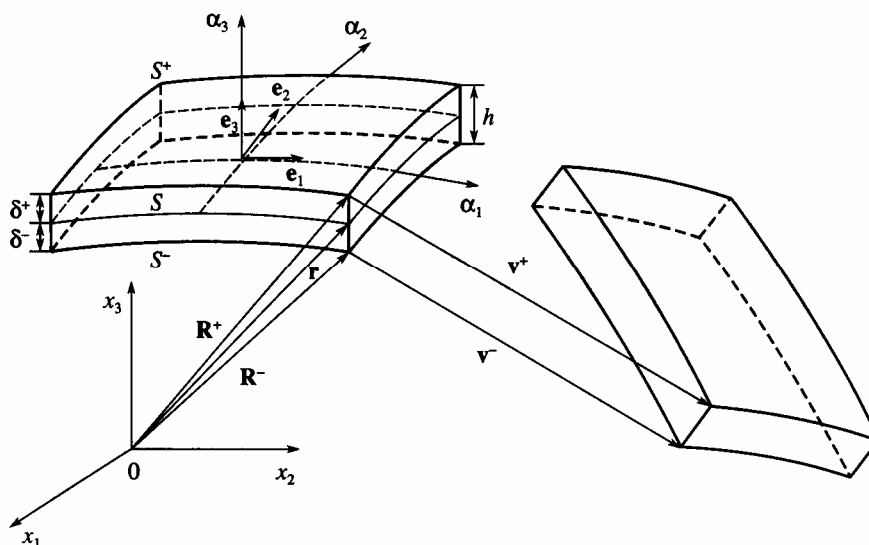
Метод конечных элементов (МКЭ) стал на сегодняшний день наиболее мощным численным методом для решения задач механики оболочек. Вместе с тем проблема построения искривленных конечных элементов тонких оболочек, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам, еще далека от решения [1–3]. Причина кроется в неадекватном представлении деформационными соотношениями больших перемещений элемента оболочки как жесткого целого. Поэтому неудивительно, что в связи с отсутствием в литературе деформационных соотношений, способных в локальных криволинейных координатах представлять произвольное деформированное состояние элемента оболочки, в основном разрабатывалась концепция вырожденного (изопараметрического) элемента [4], которая позволяла за счет существенного увеличения расчетного времени на компьютере представлять жесткие смещения элемента как жесткого целого в глобальной декартовой системе координат [3, 5].

В литературе известно достаточно много вариантов как классической теории оболочек Кирхгофа–Лява, так и уточненной теории оболочек на основе кинематической гипотезы Тимошенко. Однако лишь некоторые из них, например [6–9], приводят к правильному результату в аппроксимации жестких смещений оболочки. Доказательство этого утверждения дано для геометрически линейной теории оболочек Кирхгофа–Лява в [7, 10, 11] и уточненной теории оболочек в [12]. В публикуемой работе результаты [12] обобщаются на случай оболочек, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам.

1. Деформационные соотношения геометрически нелинейной теории упругости. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h . В качестве отсчетной поверхности S примем внутреннюю поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату α_3 будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S (фиг. 1). Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные вектора, касательные к координатным линиям α_1, α_2 ; \mathbf{e}_3 – единичный вектор нормали; A_α, k_α – параметры Ламе и кривизны координатных линий поверхности S ; δ^-, δ^+ – расстояния от поверхности S до нижней S^- и верхней S^+ поверхностей оболочки; ϵ_{ij} – компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа. Здесь и далее латинские индексы $i, j = 1, 2, 3$; а греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Деформационные соотношения геометрически нелинейной пространственной теории упругости [13] запишем в векторной форме

$$2\epsilon_{ij} = \frac{1}{H_i} \mathbf{u}_{,i} \left(\mathbf{e}_j + \frac{1}{2H_j} \mathbf{u}_{,j} \right) + \frac{1}{H_j} \mathbf{u}_{,j} \left(\mathbf{e}_i + \frac{1}{2H_i} \mathbf{u}_{,i} \right) \quad (1.1)$$
$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i, \quad H_\alpha = A_\alpha (1 + k_\alpha \alpha_3), \quad H_3 = 1$$



Фиг. 1

где $u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – компоненты вектора перемещений, H_α – параметры Ламе поверхности параллельной отсчетной поверхности S и нижний индекс i , следующий после запятой, означает частную производную по координате α_i .

Произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела также представим в векторной форме

$$\mathbf{u}^R = \Delta + (\mathbf{B} - \mathbf{E})\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \alpha_3 \mathbf{e}_3, \quad \Delta = \sum_i \Delta_i \mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \sin\theta \cos\psi & \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\theta \sin\psi & \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \sin\theta \cos\psi & -\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\theta \sin\psi & \cos\varphi \cos\theta \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{R} – радиус-вектор некоторой точки оболочки, $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ – радиус-вектор точки отсчетной поверхности S , Δ – вектор поступательного перемещения оболочки, \mathbf{E} – единичная матрица, \mathbf{B} – ортогональная матрица вращений и φ, θ, ψ – углы Эйлера–Крылова [14], характеризующие вращение оболочки как жесткого целого вокруг точки O (фиг. 1).

Для производных вектора жестких смещений (1.2) с учетом формулы (1.3) и соотношений [7] $\Delta_i = 0$, $\mathbf{R}_i = H_i \mathbf{e}_i$ находим следующее выражение:

$$\mathbf{u}_{,i}^R = H_i (\mathbf{B} \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i) \quad (1.4)$$

Если ввести производные (1.4) в деформационные соотношения (1.1), то после несложных преобразований получим

$$2\varepsilon_{ij}^R = (\mathbf{B} \mathbf{e}_i)(\mathbf{B} \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.5)$$

Принимая во внимание, что ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение векторов, из (1.5) следует

$$\varepsilon_{ij}^R = 0 \quad (1.6)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, все компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа в локальной системе криволинейных координат α_i дают строгие нули (1.6) для произвольно больших смещений оболочки как жесткого тела.

2. Деформационные соотношения геометрически нелинейной уточненной теории оболочек. Воспользуемся модифицированной кинематической гипотезой Тимошенко о линейном распределении перемещений по толщине оболочки [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= N^-(\alpha_3)\mathbf{v}^- + N^+(\alpha_3)\mathbf{v}^+ \\ \mathbf{v}^\pm &= \sum_i v_i^\pm \mathbf{e}_i, \quad N^-(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\delta^+ - \alpha_3), \quad N^+(\alpha_3) = \frac{1}{h}(\alpha_3 - \delta^-) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \mathbf{v}^\pm – векторы перемещений лицевых поверхностей оболочки S^\pm ; $v_i^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ – компоненты этих векторов; $N^\pm(\alpha_3)$ – линейные функции формы оболочки.

Вводя перемещения (2.1) в деформационные соотношения пространственной теории упругости (1.1) и учитывая формулы дифференцирования базисных векторов [7] $\mathbf{e}_{3,\alpha} = A_\alpha k_\alpha \mathbf{e}_\alpha$, приходим к деформационным соотношениям геометрически нелинейной уточненной теории оболочек средней толщины

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta}^a &= \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^+ \right] \mathbf{e}_\beta + \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^+ \right] \mathbf{e}_\alpha + \\ &+ \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^+ \right] \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^+ \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^a = \frac{\bar{H}_\alpha}{H_\alpha} \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha} (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}) \frac{1}{H_\alpha} \varepsilon_{33,\alpha}^a \quad (2.3)$$

$$\bar{H}_\alpha = A_\alpha (1 + k_\alpha \bar{\delta}), \quad \bar{\delta} = 1/2(\delta^- + \delta^+)$$

$$\varepsilon_{33}^a = \boldsymbol{\beta} (\mathbf{e}_3 + 1/2\boldsymbol{\beta}) \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{h}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-), \quad \bar{\mathbf{v}} = 1/2(\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+) \quad (2.5)$$

где \bar{H}_α – параметры Ламе срединной поверхности оболочки, $\bar{\delta}$ – расстояние от отсчетной поверхности до срединной поверхности, $\bar{\mathbf{v}}$ – вектор перемещения срединной поверхности.

Заменяя далее параметры Ламе H_α в формуле (2.2) их значениями на лицевых поверхностях $H_\alpha^\pm = A_\alpha(1 + k_\alpha \delta^\pm)$, а в формуле (2.3) их значениями на срединной поверхности \bar{H}_α , получим деформационные соотношения геометрически нелинейной уточненной теории тонких оболочек

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^b = \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^+ \right] \mathbf{e}_\beta + \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^+ \right] \mathbf{e}_\alpha +$$

$$+ \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^+ \right] \left[N^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^- + N^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^+ \right] \quad (2.6)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^b = \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha} (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}) \frac{1}{H_\alpha} \varepsilon_{33, \alpha}^b$$

$$\varepsilon_{33}^b = \boldsymbol{\beta} (\mathbf{e}_3 + 1/2\boldsymbol{\beta})$$

Для определения векторов $\boldsymbol{\beta}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ следует использовать формулы (2.5).

Деформационные соотношения (2.6) в отличие от деформационных соотношений (2.2)–(2.4) являются весьма привлекательными с точки зрения их использования в МКЭ, поскольку они точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела. Действительно, перемещения лицевых поверхностей оболочки как жесткого целого согласно формулам (1.2), (2.1) можно представить в виде

$$\mathbf{v}^{\pm R} = \Delta + (\mathbf{B} - \mathbf{E}) \mathbf{R}^\pm, \quad \mathbf{R}^\pm = \mathbf{r} + \delta^\pm \mathbf{e}_3 \quad (2.7)$$

где \mathbf{R}^\pm – радиус-векторы точек лицевых поверхностей S^\pm (фиг. 1). Для производных этих векторов имеет место формула аналогичная (1.4)

$$\mathbf{v}_{,\alpha}^{\pm R} = H_\alpha^\pm (\mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha) \quad (2.8)$$

Если ввести формулы (2.7), (2.8) в деформационные соотношения (2.5), (2.6) с учетом тождества $N^-(\alpha_3) + N^+(\alpha_3) = 1$ и использованного выше свойства ортогонального преобразования, то получим

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{bR} = (\mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{B} \mathbf{e}_\beta) - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = 0, \quad 2\varepsilon_{33}^{bR} = (\mathbf{B} \mathbf{e}_3)(\mathbf{B} \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = 0 \quad (2.9)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{bR} = \frac{H_\alpha}{H_\alpha} [(\mathbf{B} \mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{B} \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_3] = 0$$

что и требовалось доказать.

Недостатком деформационных соотношений (2.6) является то, что тангенциальные компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа изменяются по толщине оболочки согласно квадратичному закону. Это является существенным препятствием для их использования в практических приложениях, в частности в МКЭ [3, 5], поэтому более удобные деформационные соотношения геометрически нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко можно записать так

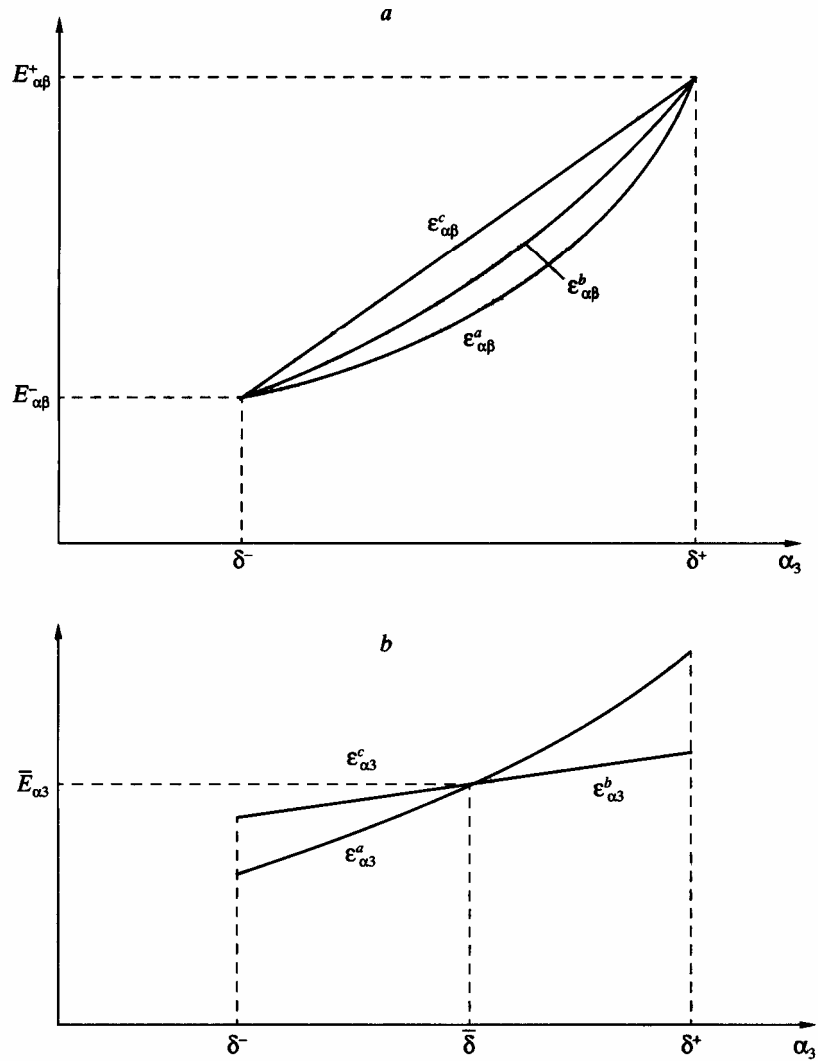
$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^c = N^-(\alpha_3) \left(\frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^- \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^- \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \mathbf{v}_{,\alpha}^- \mathbf{v}_{,\beta}^- \right) +$$

$$+ N^+(\alpha_3) \left(\frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^+ \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^+ \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \mathbf{v}_{,\alpha}^+ \mathbf{v}_{,\beta}^+ \right) \quad (2.10)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^c = \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha} (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}) \frac{1}{H_\alpha} \varepsilon_{33, \alpha}^c$$

$$\varepsilon_{33}^c = \boldsymbol{\beta} (\mathbf{e}_3 + 1/2\boldsymbol{\beta})$$

Вводя формулы (2.7), (2.8) в деформационные соотношения (2.10), убеждаемся, что они точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого целого, поскольку аналогично (2.9) имеем $\varepsilon_{ij}^{cR} = 0$.



Фиг. 2

Важно отметить, что полученные деформационные соотношения удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}^a(\delta^\pm) &= \epsilon_{\alpha\beta}^b(\delta^\pm) = \epsilon_{\alpha\beta}^c(\delta^\pm) = E_{\alpha\beta}^\pm \\ \epsilon_{\alpha 3}^a(\bar{\delta}) &= \epsilon_{\alpha 3}^b(\bar{\delta}) = \epsilon_{\alpha 3}^c(\bar{\delta}) = \bar{E}_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $E_{\alpha\beta}^\pm$ – тангенциальные деформации лицевых поверхностей S^\pm ; $\bar{E}_{\alpha 3}$ – поперечные сдвиги срединной поверхности оболочки. Геометрическая интерпретация условий (2.11) показана на фиг. 2.

В целях использования деформационных соотношений (2.10) в практических приложениях представим их в скалярной форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^c &= N^-(\alpha_3)E_{\alpha\beta}^- + N^+(\alpha_3)E_{\alpha\beta}^+, & \varepsilon_{33}^c &= E_{33} \\ \varepsilon_{\alpha 3}^c &= N^-(\alpha_3)E_{\alpha 3}^- + N^+(\alpha_3)E_{\alpha 3}^+ \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^\pm &= e_{\alpha\beta}^\pm + \eta_{\alpha\beta}^\pm, & E_{\alpha 3}^\pm &= e_{\alpha 3}^\pm + \eta_{\alpha 3}^\pm, & E_{33} &= e_{33} + \eta_{33} \\ e_{\alpha\alpha}^\pm &= \frac{1}{\zeta_\alpha^\pm} \lambda_\alpha^\pm, & 2e_{12}^\pm &= \frac{1}{\zeta_1^\pm} \omega_1^\pm + \frac{1}{\zeta_2^\pm} \omega_2^\pm, & 2e_{\alpha 3}^\pm &= \frac{\zeta_\alpha^\pm}{\bar{\zeta}_\alpha} \beta_\alpha - \frac{1}{\bar{\zeta}_\alpha} \theta_\alpha^\pm, & e_{33} &= \beta_3 \\ \eta_{\alpha\alpha}^\pm &= \frac{1}{2(\zeta_\alpha^\pm)^2} [(\lambda_\alpha^\pm)^2 + (\omega_\alpha^\pm)^2 + (\theta_\alpha^\pm)^2], & 2\eta_{12}^\pm &= \frac{1}{\zeta_1^\pm \zeta_2^\pm} (\lambda_1^\pm \omega_2^\pm + \lambda_2^\pm \omega_1^\pm + \theta_1^\pm \theta_2^\pm) \\ 2\eta_{\alpha 3}^\pm &= \frac{1}{\bar{\zeta}_\alpha} (\beta_\alpha \lambda_\alpha^\pm + \beta_\gamma \omega_\alpha^\pm - \beta_3 \theta_\alpha^\pm), & \eta_{33} &= \frac{1}{2} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \\ \lambda_\alpha^\pm &= \frac{1}{A_\alpha} v_{\alpha, \alpha}^\pm + B_\gamma v_\gamma^\pm + k_\alpha v_3^\pm, & \omega_\alpha^\pm &= \frac{1}{A_\alpha} v_{\gamma, \alpha}^\pm - B_\gamma v_\alpha^\pm \\ \theta_\alpha^\pm &= -\frac{1}{A_\alpha} v_{3, \alpha}^\pm + k_\alpha v_\alpha^\pm, & \beta_i &= \frac{1}{h} (v_i^+ - v_i^-) \\ \zeta_\alpha^\pm &= 1 + k_\alpha \delta^\pm, & \bar{\zeta}_\alpha &= 1 + k_\alpha \bar{\delta}, & B_\alpha &= \frac{1}{A_1 A_2} A_{\gamma, \alpha} \quad (\gamma \neq \alpha) \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Деформационные соотношения геометрически нелинейной теории многослойных оболочек на основе гипотезы ломаной нормали. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h , составленную из N слоев также постоянной толщины h_k . Здесь и в дальнейшем индекс $k = \overline{1, N}$. В качестве отсчетной поверхности S примем внутреннюю поверхность какого-либо k -го слоя или поверхность контакта слоев, которую, как и ранее, отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн. Поперечная координата α_3 также отсчитывается в сторону возрастания внешней нормали к поверхности S .

Вспользуемся кинематической гипотезой о линейном распределении перемещений по толщине k -го слоя оболочки [15]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)} &= N_k^-(\alpha_3) \mathbf{v}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \mathbf{v}^{(k)} \\ \mathbf{v}^{(l)} &= \sum_i v_i^{(l)} \mathbf{e}_i, & N_k^-(\alpha_3) &= \frac{1}{h_k} (\delta_k - \alpha_3), & N_k^+(\alpha_3) &= \frac{1}{h_k} (\alpha_3 - \delta_{k-1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{v}^{(l)}$ – векторы перемещений лицевых поверхностей слоев, $v_i^{(l)}(\alpha_1, \alpha_2)$ – компоненты этих векторов, $N_k^\pm(\alpha_3)$ – линейные функции формы k -го слоя оболочки, δ_l – расстояние от поверхности S до лицевой поверхности k -го слоя, нижней при $l = k - 1$ и верхней при $l = k$.

Введем перемещения (3.1) в деформационные соотношения нелинейной теории упругости (1.1) и, учитывая формулы дифференцирования базисных векторов [7], после несложных преобразований получим деформационные соотношения геометрически нелинейной теории многослойных оболочек средней толщины

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)a} = \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k)} \right] \mathbf{e}_\beta + \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k)} \right] \mathbf{e}_\alpha + \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k)} \right] \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k)} \right] \quad (3.2)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)\alpha} = \frac{\bar{H}_\alpha^{(k)}}{H_\alpha} \boldsymbol{\beta}^{(k)} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^{(k)} (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}_k) \frac{1}{H_\alpha} \varepsilon_{33,\alpha}^{(k)a} \quad (3.3)$$

$$\bar{H}_\alpha^{(k)} = A_\alpha (1 + k_\alpha \bar{\delta}_k), \quad \bar{\delta}_k = 1/2(\delta_{k-1} + \delta_k)$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)a} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} (\mathbf{e}_3 + 1/2 \boldsymbol{\beta}^{(k)}) \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(k)} = \frac{1}{h_k} (\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k-1)}), \quad \bar{\mathbf{v}}^{(k)} = 1/2(\mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{v}^{(k)}) \quad (3.5)$$

где $\bar{H}_\alpha^{(k)}$ – параметры Ламе срединной поверхности k -го слоя, $\bar{\delta}_k$ – расстояние от отсчетной поверхности S до срединной поверхности k -го слоя, $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$ – вектор перемещения срединной поверхности k -го слоя.

Заменяя параметры Ламе H_α в формуле (3.2) их значениями на лицевых поверхностях k -го слоя $H_\alpha^{(k-1)}$ и $H_\alpha^{(k)}$, а в формуле (3.3) их значениями на срединной поверхности k -го слоя $\bar{H}_\alpha^{(k)}$, приходим к деформационным соотношениям геометрически нелинейной теории тонких многослойных оболочек

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)b} = \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha^{(k)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k)} \right] \mathbf{e}_\beta + \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta^{(k)}} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k)} \right] \mathbf{e}_\alpha + \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\alpha^{(k)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k)} \right] \times \left[N_k^-(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3) \frac{1}{H_\beta^{(k)}} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k)} \right] \quad (3.6)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)b} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{\bar{H}_\alpha^{(k)}} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^{(k)} (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}_k) \frac{1}{\bar{H}_\alpha^{(k)}} \varepsilon_{33,\alpha}^{(k)b}$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)b} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} (\mathbf{e}_3 + 1/2 \boldsymbol{\beta}^{(k)}), \quad H_\alpha^{(l)} = A_\alpha (1 + k_\alpha \delta_l) \quad (l = k-1, k)$$

которые в отличие от деформационных соотношений (3.2)–(3.4) точно представляют произвольно большие перемещения слоя оболочки как жесткого тела.

Доказательство этого фундаментального утверждения вытекает из представления перемещений лицевых поверхностей k -го слоя как жесткого целого и их производных по криволинейным координатам

$$\mathbf{v}^{(l)R} = \Delta + (\mathbf{B} - \mathbf{E})\mathbf{R}^{(l)}, \quad \mathbf{R}^{(l)} = \mathbf{r} + \delta_l \mathbf{e}_3 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}_{,\alpha}^{(l)R} = H_\alpha^{(l)}(\mathbf{B}\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\alpha) \quad (l = k-1, k) \quad (3.8)$$

где $\mathbf{R}^{(l)}$ – радиус-векторы точек лицевых поверхностей k -го слоя. Вводя далее формулы (3.7), (3.8) в деформационные соотношения (3.5), (3.6) и учитывая очевидное тождество $N_k^-(\alpha_3) + N_k^+(\alpha_3) = 1$ и свойство преобразования \mathbf{B} сохранять скалярное произведение векторов, приходим к требуемому результату

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)bR} &= (\mathbf{B}\mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{B}\mathbf{e}_\beta) - \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta = 0, \quad 2\varepsilon_{33}^{(k)bR} = (\mathbf{B}\mathbf{e}_3)(\mathbf{B}\mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = 0 \\ 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)bR} &= \frac{H_\alpha}{\bar{H}_\alpha^{(k)}}[(\mathbf{B}\mathbf{e}_\alpha)(\mathbf{B}\mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_3] = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Более простые и удобные деформационные соотношения геометрически нелинейной теории тонких многослойных оболочек на основе гипотезы ломаной нормали могут быть получены, если в формулах (3.6) для тангенциальных компонент тензора деформаций Грина–Лагранжа пренебречь квадратичными членами, зависящими от поперечной координаты α_3 . В результате, приходим к следующим деформационным соотношениям:

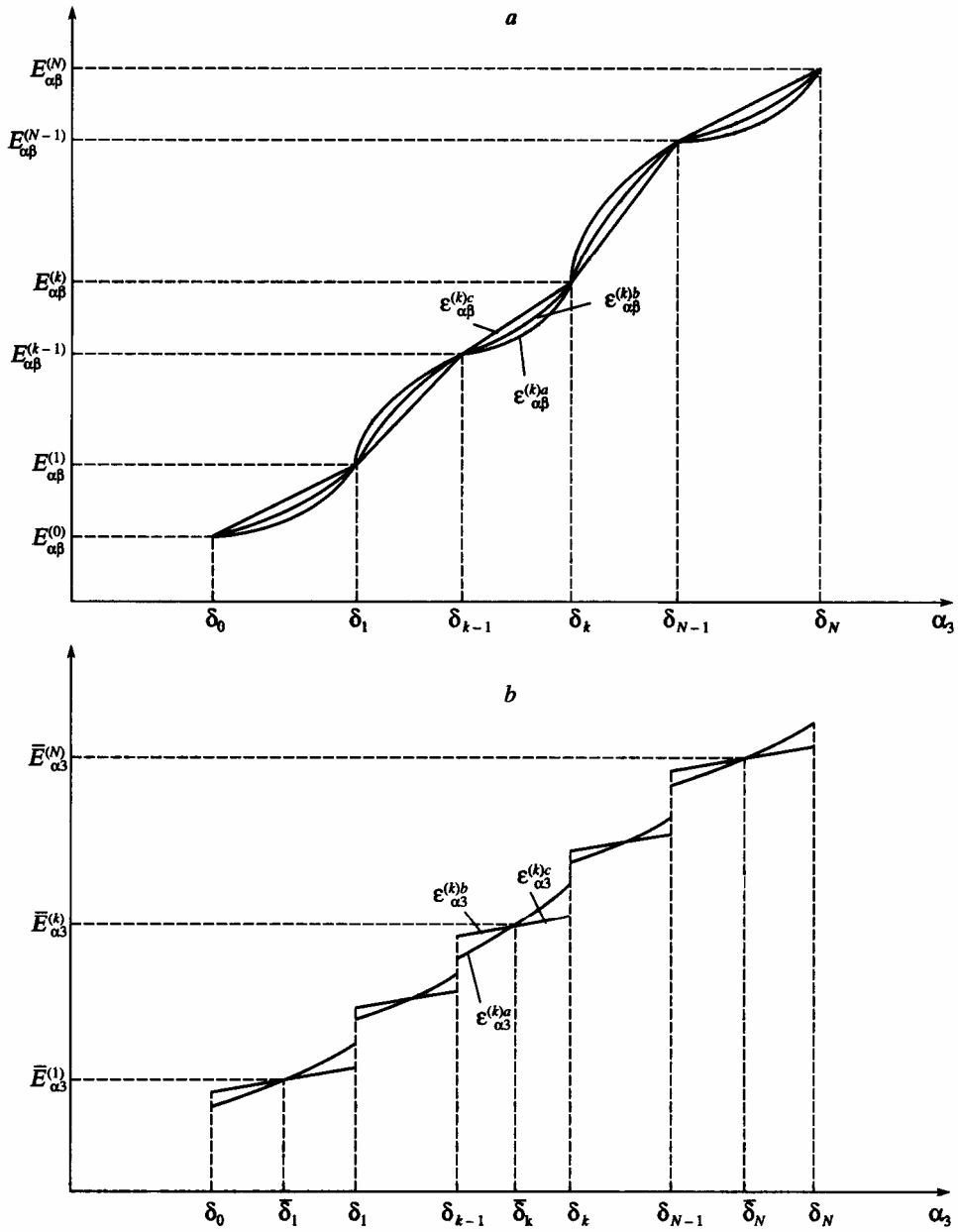
$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)c} &= N_k^-(\alpha_3) \left(\frac{1}{H_\alpha^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k-1)} \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k-1)} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha^{(k-1)} H_\beta^{(k-1)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k-1)} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k-1)} \right) + \\ &+ N_k^+(\alpha_3) \left(\frac{1}{H_\alpha^{(k)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k)} \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta^{(k)}} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k)} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha^{(k)} H_\beta^{(k)}} \mathbf{v}_{,\alpha}^{(k)} \mathbf{v}_{,\beta}^{(k)} \right) \\ 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)c} &= \beta^{(k)} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{\bar{H}_\alpha^{(k)}} \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^{(k)} (\mathbf{e}_3 + \beta^{(k)}) + (\alpha_3 - \bar{\delta}_k) \frac{1}{\bar{H}_\alpha^{(k)}} \varepsilon_{33, \alpha}^{(k)c} \\ \varepsilon_{33}^{(k)c} &= \beta^{(k)} (\mathbf{e}_3 + 1/2\beta^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

которые также точно представляют произвольно большие перемещения k -го слоя оболочки как твердого тела, поскольку аналогично (3.9) имеем $\varepsilon_{ij}^{(k)cR} = 0$.

Заметим, что построенные деформационные соотношения теории многослойных оболочек на основе кинематической гипотезы ломаной линии удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)a}(\delta_l) &= \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)b}(\delta_l) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)c}(\delta_l) = E_{\alpha\beta}^{(l)} \quad (l = k-1, k) \\ \varepsilon_{\alpha 3}^{(k)a}(\bar{\delta}_k) &= \varepsilon_{\alpha 3}^{(k)b}(\bar{\delta}_k) = \varepsilon_{\alpha 3}^{(k)c}(\bar{\delta}_k) = \bar{E}_{\alpha 3}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $E_{\alpha\beta}^{(l)}$ – тангенциальные деформации лицевых поверхностей k -го слоя, $\bar{E}_{\alpha 3}^{(k)}$ – поперечные сдвиги срединной поверхности k -го слоя. Геометрическая интерпретация условий (3.11) показана на фиг. 3.



Фиг. 3

В заключение запишем деформационные соотношения (3.10) в скалярной форме

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\beta}^{(k)c} &= N_k^-(\alpha_3)E_{\alpha\beta}^{(k-1)} + N_k^+(\alpha_3)E_{\alpha\beta}^{(k)}, & \epsilon_{33}^{(k)c} &= E_{33}^{(k)} \\
 \epsilon_{\alpha 3}^{(k)c} &= N_k^-(\alpha_3)E_{\alpha 3}^{(k)-} + N_k^+(\alpha_3)E_{\alpha 3}^{(k)+}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta}^{(l)} &= e_{\alpha\beta}^{(l)} + \eta_{\alpha\beta}^{(l)}, \quad E_{\alpha 3}^{(k)\pm} = e_{\alpha 3}^{(k)\pm} + \eta_{\alpha 3}^{(k)\pm}, \quad E_{33}^{(k)} = e_{33}^{(k)} + \eta_{33}^{(k)} \\
 e_{\alpha\alpha}^{(l)} &= \frac{1}{\zeta_{\alpha}^{(l)}} \lambda_{\alpha}^{(l)}, \quad 2e_{12}^{(l)} = \frac{1}{\zeta_1^{(l)}} \omega_1^{(l)} + \frac{1}{\zeta_2^{(l)}} \omega_2^{(l)}, \quad e_{33}^{(k)} = \beta_3^{(k)} \\
 2e_{\alpha 3}^{(k)-} &= \frac{\zeta_{\alpha}^{(k-1)}}{\bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)}} \beta_{\alpha}^{(k)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)}} \theta_{\alpha}^{(k-1)}, \quad 2e_{\alpha 3}^{(k)+} = \frac{\xi_{\alpha}^{(k)}}{\bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)}} \beta_{\alpha}^{(k)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)}} \theta_{\alpha}^{(k)} \\
 \eta_{\alpha\alpha}^{(l)} &= \frac{1}{2(\zeta_{\alpha}^{(l)})^2} [(\lambda_{\alpha}^{(l)})^2 + (\omega_{\alpha}^{(l)})^2 + (\theta_{\alpha}^{(l)})^2] \\
 2\eta_{12}^{(l)} &= \frac{1}{\zeta_1^{(l)} \zeta_2^{(l)}} (\lambda_1^{(l)} \omega_2^{(l)} + \lambda_2^{(l)} \omega_1^{(l)} + \theta_1^{(l)} \theta_2^{(l)}) \\
 2\eta_{\alpha 3}^{(k)-} &= \frac{1}{\bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)}} (\beta_{\alpha}^{(k)} \lambda_{\alpha}^{(k-1)} + \beta_{\gamma}^{(k)} \omega_{\alpha}^{(k-1)} - \beta_3^{(k)} \theta_{\alpha}^{(k-1)}) \\
 2\eta_{\alpha 3}^{(k)+} &= \frac{1}{\bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)}} (\beta_{\alpha}^{(k)} \lambda_{\alpha}^{(k)} + \beta_{\gamma}^{(k)} \omega_{\alpha}^{(k)} - \beta_3^{(k)} \theta_{\alpha}^{(k)}) \\
 \eta_{33}^{(k)} &= \frac{1}{2} [(\beta_1^{(k)})^2 + (\beta_2^{(k)})^2 + (\beta_3^{(k)})^2], \quad \lambda_{\alpha}^{(l)} = \frac{1}{A_{\alpha}} v_{\alpha, \alpha}^{(l)} + B_{\gamma} v_{\gamma}^{(l)} + k_{\alpha} v_3^{(l)} \\
 \omega_{\alpha}^{(l)} &= \frac{1}{A_{\alpha}} v_{\gamma, \alpha}^{(l)} - B_{\gamma} v_{\alpha}^{(l)}, \quad \theta_{\alpha}^{(l)} = -\frac{1}{A_{\alpha}} v_{3, \alpha}^{(l)} + k_{\alpha} v_{\alpha}^{(l)}, \quad \beta_i^{(k)} = \frac{1}{h_k} (v_i^{(k)} - v_i^{(k-1)}) \\
 \zeta_{\alpha}^{(l)} &= 1 + k_{\alpha} \delta_l, \quad \bar{\zeta}_{\alpha}^{(k)} = 1 + k_{\alpha} \bar{\delta}_k, \quad B_{\alpha} = \frac{1}{A_1 A_2} A_{\gamma, \alpha}, \quad (l = k-1, k; \gamma \neq \alpha)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

4. Выводы. Таким образом, в работе построены соотношения для тензора деформаций Грина–Лагранжа в криволинейных ортогональных координатах для однородных оболочек на основе кинематической гипотезы Тимошенко (2.12), (2.13) и многослойных оболочек на основе гипотезы ломаной нормали (3.12), (3.13). Они могут быть с успехом использованы в МКЭ при разработке новых и эффективных конечных элементов однородных и многослойных оболочек, точно представляющих произвольно большие перемещения элемента как жесткого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С. Сахарова и Н. Альтсбаха. Киев: Вища шк., 1982. 479 с.
2. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: КФТИ АН СССР, 1989. 269 с.
3. Bathe K.J. Finite Element Procedures. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
4. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1970. V. 2. № 3. P. 419–451.
5. Noor A.K. Bibliography of books and monographs on finite element technology // Appl. Mech. Rev. 1991. V. 44. № 6. P. 307–317.
6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 4. С. 435–446.
9. Kulikov G.M. Refined global approximation theory of multilayered plates and shells // J. Eng. Mech. 2001. V. 127. № 2. P. 119–125.
10. Кантин Д. Зависимости деформаций цилиндрических оболочек от перемещений // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 9. С. 219–220.
11. Dawe D.J. Rigid-body motions and strain-displacement equations of curved shell finite elements // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 9. P. 569–578.
12. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Simple and effective elements based upon Timoshenko–Mindlin shell theory // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2002. V. 191. № 11–12. P. 1173–1187.
13. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
14. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
15. Kulikov G.M. Non-linear analysis of multilayered shells under initial stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36. № 2. P. 323–334.

Тамбов

Поступила в редакцию
6.05.2002