

УДК 539.3

© 2014 г. Куликов Г.М., Плотникова С.В.

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК**

Рассмотрен новый метод решения задач термоупругости для толстых и тонких оболочек в пространственной постановке. Согласно этому методу в теле оболочки вводятся N отсчетных поверхностей, параллельных срединной поверхности и расположенных в узлах многочлена Чебышева, для того чтобы выбрать температуры и векторы перемещений этих поверхностей в качестве искоемых функций. Такой выбор искоемых функций позволяет представить разрешающие уравнения предложенной теории композитных оболочек в достаточно компактной форме и использовать деформационные соотношения, которые корректно описывают перемещения оболочки как жесткого тела.

1. Известно [1, 2], что традиционный путь построения теории оболочек состоит в разложении перемещений в степенные ряды относительно поперечной координаты θ_3 , отсчитываемой вдоль внешней нормали к срединной поверхности. Для приближенно-го представления поля перемещений можно воспользоваться конечными отрезками степенных рядов, поскольку основная цель теории упругих оболочек состоит в получении приближенных решений задач трехмерной теории. Однако кажущееся преимущество такого подхода теряется при его применении в задачах статики толстых термоупругих оболочек, в которых для получения приемлемых результатов необходимо удерживать достаточно большое число членов в соответствующих разложениях.

Более продуктивный подход связан с введением в теле оболочки отсчетных поверхностей $\Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^N$ параллельных срединной поверхности с целью использования температур T^1, T^2, \dots, T^N и векторов перемещений $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^N$ этих поверхностей в качестве искоемых функций [3–5]. Такой выбор искоемых функций с последующим использованием полиномов Лагранжа степени $N - 1$ в пространственных аппроксимациях перемещений позволяет представить разрешающие уравнения предложенной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и построить деформационные соотношения, которые точно представляют перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат [5].

Теория оболочек высокого порядка [3] основана на использовании эквидистантных отсчетных поверхностей, при этом лицевые поверхности оболочки выбираются в качестве отсчетных. Это ограничивает применение данной теории для расчета толстых оболочек. Дело в том, что предложенная пространственная полиномиальная интерполяция вектора перемещений с использованием полиномов Лагранжа высокой степени может приводить вследствие феномена Рунге к значительной осцилляции полиномиальных аппроксимаций в зоне краевого эффекта. Этот феномен был открыт Рунге [6] при изучении погрешности полиномиальной интерполяции для приближения некоторых функций на равномерной сетке. С возрастанием степени полинома погрешность интерполяции может стремиться к бесконечности. В численном анализе для борьбы с указанным явлением в качестве узлов интерполяции принято использовать

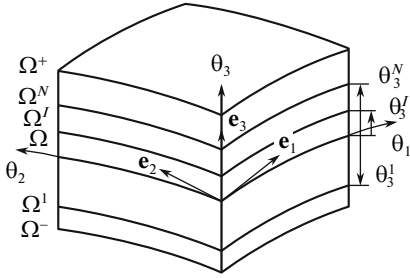


Рис. 1

θ_1, θ_2 , отсчитываемым вдоль линий главных кривизн, а координату θ_3 будем отсчитывать в поперечном направлении. Пусть \mathbf{e}_α – единичные векторы касательных к координатным линиям θ_α ; \mathbf{e}_3 – единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности; A_α – коэффициенты первой квадратичной формы; k_α – главные кривизны; $c_\alpha = 1 + k_\alpha \theta_3$ – компоненты геометрического тензора сдвига; $c_\alpha^I = 1 + k_\alpha \theta_3^I$ – компоненты геометрического тензора сдвига на отсчетных поверхностях Ω^I в оболочке (рис. 1); θ_3^I – поперечные координаты поверхностей Ω^I , которые располагаются внутри интервала $(-h/2, h/2)$ в узлах полинома Чебышева степени N и определяются согласно [8] по формуле

$$\theta_3^I = -\frac{h}{2} \cos\left(\pi \frac{2I-1}{2N}\right),$$

где I, J, K указывают на принадлежность некоторой величины к отсчетной поверхности и принимают значения $1, 2, \dots, N$; греческие индексы $\alpha, \beta = 1, 2$; латинские индексы $i, j, k, m = 1, 2, 3$. Отметим, что в статье применяется соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам.

Градиент температуры Γ_i и температура T связаны посредством формул

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{A_\alpha c_\alpha} T_{,\alpha}, \quad \Gamma_3 = T_{,3}. \quad (1)$$

Первое предположение данной теории термоупругих оболочек на основе метода отсчетных поверхностей касается вида распределения температуры и градиента температуры в поперечном направлении

$$T = \sum_I L^I T^I, \quad T^I = T(\theta_3^I), \quad (2) \quad \Gamma_i = \sum_I L^I \Gamma_i^I, \quad \Gamma_i^I = \Gamma_i(\theta_3^I), \quad (3)$$

где T^I, Γ_i^I – температура и градиент температуры на отсчетных поверхностях Ω^I ;

$L^I(\theta_3)$ – полиномы Лагранжа степени $N-1$: $L^I = \prod_{J \neq I} \frac{\theta_3 - \theta_3^J}{\theta_3^I - \theta_3^J}$.

Из соотношений (2), (3) имеем

$$\Gamma_\alpha^I = \frac{1}{A_\alpha c_\alpha^I} T_{,\alpha}^I, \quad \Gamma_3^I = \sum_J M^J(\theta_3^I) T^J, \quad (4)$$

корни многочлена Чебышева [7], что помогает существенно улучшить поведение полиномиальных аппроксимаций высокой степени, для которых ошибка интерполяции стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Это дает возможность находить решение трехмерных задач статики для толстых оболочек с любой наперед заданной точностью при достаточно большом числе отсчетных поверхностей.

2. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h . Отнесем срединную поверхность Ω к криволинейным ортогональным координатам

где $M^I = L_{,3}^I$ – полиномы степени $N - 2$; их значения на отсчетных поверхностях Ω^I находим по формулам

$$M^J(\theta_3^I) = \frac{1}{\theta_3^J - \theta_3^I} \prod_{K \neq I, J} \frac{\theta_3^I - \theta_3^K}{\theta_3^J - \theta_3^K} \quad (J \neq I), \quad M^I(\theta_3^I) = -\sum_{J \neq I} M^J(\theta_3^I).$$

Таким образом, поперечные компоненты градиента температуры Γ_3^I на поверхностях Ω^I представлены согласно (4) в виде линейной комбинации температур отсчетных поверхностей T^J .

3. Компоненты тензора деформаций на отсчетных поверхностях можно записать в векторной форме [3, 4]

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{A_\alpha c_\alpha} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{A_\beta c_\beta} \mathbf{u}_{,\beta}^I \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha c_\alpha} \mathbf{u}_{,\alpha}^I \cdot \mathbf{e}_3, \quad \varepsilon_{33}^I = \boldsymbol{\beta}^I \cdot \mathbf{e}_3, \quad (5)$$

где $\mathbf{u}^I = \mathbf{u}(\theta_3^I)$, $\boldsymbol{\beta}^I = \mathbf{u}_{,3}(\theta_3^I)$ – векторы перемещений отсчетных поверхностей и значения производной вектора перемещений по координате θ_3 на поверхностях Ω^I .

Представим векторы \mathbf{u}^I , $\boldsymbol{\beta}^I$ в ортонормированном базисе \mathbf{e}_i

$$\mathbf{u}^I = u_i^I \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\beta}^I = \beta_i^I \mathbf{e}_i. \quad (6)$$

Дифференцируя (9) по координате θ_3 и учитывая результаты [2], получим

$$\mathbf{u}_{,\alpha}^I = A_\alpha \lambda_{i\alpha}^I \mathbf{e}_i, \quad (7)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{,\alpha}^I + B_\alpha u_\beta^I + k_\alpha u_3^I, \quad \lambda_{\beta\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{,\beta}^I - B_\alpha u_\alpha^I \quad (\beta \neq \alpha) \quad (8)$$

$$\lambda_{3\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^I - k_\alpha u_\alpha^I, \quad B_\alpha = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta} \quad (\beta \neq \alpha).$$

Вводя разложения (6), (7) в (5), приходим к скалярной форме деформационных соотношений

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = \frac{1}{c_\beta} \lambda_{\alpha\beta}^I + \frac{1}{c_\alpha} \lambda_{\beta\alpha}^I, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = \beta_\alpha^I + \frac{1}{c_\alpha} \lambda_{3\alpha}^I, \quad \varepsilon_{33}^I = \beta_3^I. \quad (9)$$

Следующий шаг состоит в выборе закона распределения перемещений и деформаций по толщине оболочки. Очевидно, что их распределение в поперечном направлении должно быть согласовано с распределением температуры и градиента температуры (2), (3), т.е.

$$u_i = \sum_I L^I u_i^I, \quad (10) \quad \varepsilon_{ij} = \sum_I L^I \varepsilon_{ij}^I. \quad (11)$$

Из соотношений (6), (10) находим

$$\beta_i^I = \sum_J M^J(\theta_3^I) u_i^J. \quad (12)$$

Видно, что определяющие функции данной теории оболочек β_i^I представлены в виде линейной комбинации перемещений отсчетных поверхностей u_i^J .

Отметим, что деформационные соотношения (9), (11) точно представляют перемещения оболочки как жесткого тела в системе криволинейных поверхностных координат.

4. Вариационное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\delta J = 0, \quad (13)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \int q_i \Gamma_i A_1 A_2 c_1 c_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 - \iint_{\bar{\Omega}} T Q_n d\Omega, \quad (14)$$

где q_i – компоненты теплового потока; Q_n – тепловой поток по направлению нормали к поверхности $\bar{\Omega} = \Omega^- + \Omega^+ + \Sigma$ (Ω^- , Ω^+ – лицевые поверхности оболочки); Σ – боковая граничная поверхность.

Подставляя распределение градиента температуры (3) и (14) и вводя результирующие теплового потока

$$R_i^I = \int_{-h/2}^{h/2} q_i L^I c_1 c_2 d\theta_3, \quad (15)$$

приходим к формуле

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_I \sum R_i^I \Gamma_i^I A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 - \iint_{\bar{\Omega}} T Q_n d\Omega. \quad (16)$$

Уравнения состояния теплопроводности согласно закону Фурье представим в виде

$$q_i = -k_{ij} \Gamma_j, \quad (17)$$

где k_{ij} – коэффициенты теплопроводности.

Вводя уравнения состояния (17) в (15) и учитывая распределение (3), получим

$$R_i^I = - \sum_J \Lambda^{IJ} k_{ij} \Gamma_j^J, \quad (18) \quad \Lambda^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} L^I L^J c_1 c_2 d\theta_3. \quad (19)$$

5. Вариационное уравнение термоупругости в случае консервативного нагружения имеет вид

$$\delta \Pi = 0, \quad (20)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - S \Theta) A_1 A_2 c_1 c_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 - W, \quad (21)$$

$$W = \int_{\Omega} (c_1^+ c_2^+ p_i^+ u_i^+ - c_1^- c_2^- p_i^- u_i^-) A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 + W_{\Sigma}, \quad (22)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений; S – плотность энтропии; p_i^-, p_i^+ – поверхностные нагрузки, действующие на лицевых поверхностях оболочки Ω^-, Ω^+ ; $u_i^- = u_i(-h/2)$, $u_i^+ = u_i(h/2)$ – перемещения лицевых поверхностей оболочки; $c_\alpha^- = 1 - k_\alpha h/2$, $c_\alpha^+ = 1 + k_\alpha h/2$ – компоненты тензора сдвига на лицевых поверхностях; W_Σ – работа внешних нагрузок, действующих на боковой поверхности Σ ; Θ – приращение температуры, определяемое по формуле

$$\Theta = T - T_0. \quad (23)$$

Подставляя распределение деформаций в поперечном направлении (11) и распределение температуры

$$\Theta = \sum_I L^I \Theta^I \quad (24)$$

непосредственно следующее в (2), (23), в функционал (21) и вводя результирующие напряжения и энтропии

$$H_{ij}^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} L^I c_1 c_2 d\theta_3, \quad (25)$$

$$P^I = \int_{-h/2}^{h/2} S L^I c_1 c_2 d\theta_3, \quad (26)$$

получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_I (H_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I - P^I \Theta^I) A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 - W. \quad (27)$$

Уравнения состояния термоупругости [8] представим в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \gamma_{ij} \Theta, \quad (28) \quad S = \gamma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho c_V \Theta / T_0, \quad (29)$$

где C_{ijkl} – тензор моделей упругости; γ_{ij} – температурные напряжения; ρ , c_V – удельная плотность и удельная объемная теплоемкость [10].

Введем напряжения (28) и энтропию (29) соответственно в (25), (26) и, учитывая распределение деформаций и температуры в поперечном направлении (11), (24), приходим к формулам для вычисления результирующих напряжений и энтропии

$$H_{ij}^I = \sum_J \Lambda^{IJ} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^J - \gamma_{ij} \Theta^J), \quad (30) \quad P^I = \sum_J \Lambda^{IJ} (\gamma_{ij} \varepsilon_{ij}^J + \rho c_V \Theta^J / T_0). \quad (31)$$

6. В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой ортотропной цилиндрической оболочки размером $L/R = 4$ под действием теплового потока, распределенного на внешней поверхности по синусоидальному закону, в то время как внутренняя поверхность является теплоизолированной

$$q_3^+ = q_0 \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \cos 2\theta_2, \quad q_3^- = 0,$$

Отсчетные поверхности расположены в узлах полинома Чебышева

N	$\bar{\theta}(0,5)$	$\bar{u}_3(0)$	$\bar{\sigma}_{11}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{22}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{13}(0,25)$	$\bar{\sigma}_{23}(-0,25)$	$\bar{\sigma}_{33}(-0,25)$
3	-1,314	-5,275	9,066	1,604	1,590	2,897	-2,747
5	-1,405	-5,668	8,874	1,856	1,630	3,356	0,106
7	-1,405	-5,660	8,769	1,736	1,667	3,362	1,632
9	-1,405	-5,661	8,765	1,731	1,665	3,361	1,570
11	-1,405	-5,661	8,765	1,730	1,665	3,360	1,570
13	-1,405	-5,661	8,765	1,730	1,665	3,360	1,571
15	-1,405	-5,661	8,765	1,730	1,665	3,360	1,571

Отсчетные поверхности расположены в равноудаленных узлах [3]

N	$\bar{\theta}(0,5)$	$\bar{u}_3(0)$	$\bar{\sigma}_{11}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{22}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{13}(0,25)$	$\bar{\sigma}_{23}(-0,25)$	$\bar{\sigma}_{33}(-0,25)$
3	-1,337	-5,438	9,240	1,720	1,622	2,968	-2,838
5	-1,406	-5,673	8,894	1,879	1,625	3,313	-0,041
7	-1,405	-5,662	8,777	1,745	1,669	3,368	1,740
9	-1,405	-5,661	8,772	1,738	1,667	3,379	1,561
11	-1,405	-5,662	8,772	1,739	1,663	3,334	1,490
13	-1,405	-5,663	8,774	1,740	1,667	3,366	1,670
15	-1,406	-5,665	8,778	1,742	1,669	3,395	1,563

где L – длина оболочки; R – радиус срединной поверхности; θ_1, θ_2 – меридиональная и окружная координаты.

Граничные условия на торцах оболочки имеют вид

$$\sigma_{11} = u_2 = u_3 = \Theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_1 = L. \quad (32)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (32), примем

$$u_1^I = u_{10}^I \cos \frac{\pi \theta_1}{L} \cos 2\theta_2, \quad u_2^I = u_{20}^I \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \sin 2\theta_2, \quad (33)$$

$$u_3^I = u_{30}^I \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \cos 2\theta_2, \quad \Theta^I = \Theta_0^I \sin \frac{\pi \theta_1}{L} \cos 2\theta_2.$$

Подставляя (33) в функционалы (16), (22), (27) и учитывая соотношения (4), (8), (9), (12), (18), (19), (23), (30), (31) и $W_\Sigma = 0$, получим

$$J = J(\Theta_0^I), \quad \Pi = \Pi(\Theta_0^I, u_{i0}^I). \quad (34)$$

Из вариационных уравнений (13), (20) с учетом (34) вытекают системы линейных алгебраических уравнений порядков N и $3N$

$$\frac{\partial J}{\partial \Theta_0^I} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_{i0}^I} = 0. \quad (35)$$

Системы (35) решаются независимо друг от друга методом Гаусса. Описанный алгоритм реализован в среде программирования MATLAB с использованием пакета Tool-Box Symbolic Math, позволяющего выполнять символьные вычисления. В результате

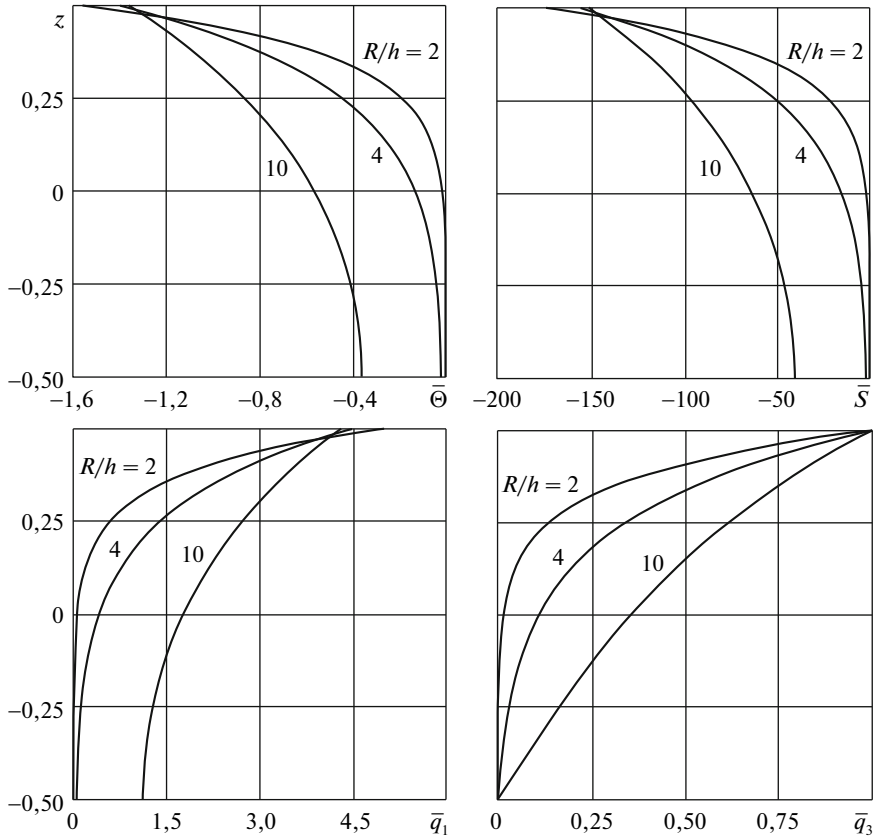


Рис. 2. Распределение температуры, энтропии и теплового потока по толщине композитной цилиндрической оболочки

получено точное решение пространственной задачи термоупругости для шарнирно опертой цилиндрической оболочки.

Пусть цилиндрическая оболочка изготовлена из армированного в окружном направлении композита со следующими механическими параметрами: $E_L = 10E_0$, $E_T = E_0$, $G_{LT} = 0,5E_0$, $G_{TT} = 0,2E_0$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25$, $\alpha_L = \alpha_0$, $\alpha_T = 7,2\alpha_0$, $k_L = 100k_0$, $k_T = k_0$, $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $c_V = 900 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, где $E_0 = 20 \text{ ГПа}$, $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$, $k_0 = 0,5 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$. Обычно индексы L и T соответствуют направлению армирования и поперечному направлению. Далее примем $R = 1 \text{ м}$, $T_0 = 293 \text{ К}$, $q_0 = 1 \text{ Вт/м}^2$ и введем безразмерные величины

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_3 &= 10^3 k_0 u_3(L/2, 0, z)/L^2 \alpha_0 q_0, & \bar{\sigma}_{11} &= 10^2 k_0 \sigma_{11}(L/2, 0, z)/LE_0 \alpha_0 q_0, \\
 \bar{\sigma}_{22} &= 10^2 k_0 \sigma_{22}(L/2, 0, z)/LE_0 \alpha_0 q_0, & \bar{\sigma}_{13} &= 10^3 k_0 \sigma_{13}(0, 0, z)/LE_0 \alpha_0 q_0, \\
 \bar{\sigma}_{23} &= 10^3 k_0 \sigma_{23}(L/2, \pi/4, z)/LE_0 \alpha_0 q_0, & \bar{\sigma}_{33} &= 10^3 k_0 \sigma_{33}(L/2, 0, z)/LE_0 \alpha_0 q_0, \\
 \bar{\Theta} &= 10^2 k_0 \Theta(L/2, 0, z)/L q_0, & \bar{S} &= k_0 S(L/2, 0, z)/LE_0 \alpha_0^2 q_0, \\
 \bar{q}_1 &= 10^2 q_1(0, 0, z)/q_0, & \bar{q}_3 &= q_3(L/2, 0, z)/q_0, & z &= \theta_3/h.
 \end{aligned} \tag{36}$$

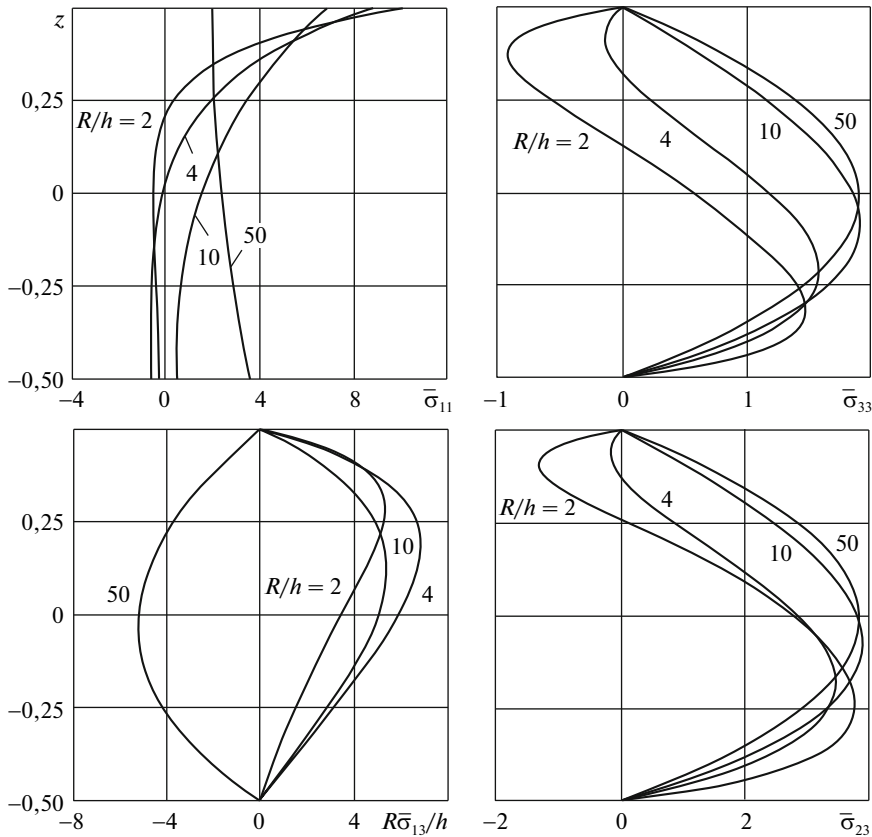


Рис. 3. Распределение напряжений по толщине композитной цилиндрической оболочки

Данные таблицы, полученные путем выбора отсчетных поверхностей в узлах полинома Чебышева и с использованием эквидистантных отсчетных поверхностей [3], показывают, что при достаточно больших значениях параметра N можно добиться хорошего согласования обоих подходов даже для толстой оболочки ($R/h = 4$). Однако в подходе [3] отсутствует равномерная сходимость к точному решению задачи. На рис. 2 и 3 представлены распределения безразмерных величин (36) по толщине оболочки с геометрическими параметрами $R/h = 2, 4, 10, 50$ в случае выбора 13 отсчетных поверхностей, расположенных в узлах полинома Чебышева, которые свидетельствуют о высоком потенциале предложенного метода решения задачи термоупругости для толстых и тонких оболочек в пространственной постановке. Видно, что граничные условия на лицевых поверхностях оболочки для поперечных компонент тензора напряжений и вектора теплового потока удовлетворяются с высокой точностью. Дополнительно на рис. 4 показаны логарифмические погрешности $\delta_i = \lg|\bar{\sigma}_{i3}|$ удовлетворения граничных условий для этих напряжений на лицевых поверхностях оболочки для различных значений параметра N ; на рис. 4, *a* изображены результаты решения задачи на основе выбора отсчетных поверхностей в узлах полинома Чебышева, а на рис. 4, *б* показаны результаты с использованием подхода [3]. Расчеты на основе подхода [3] не обеспечивают монотонную сходимость решения и приводят к неадекватному

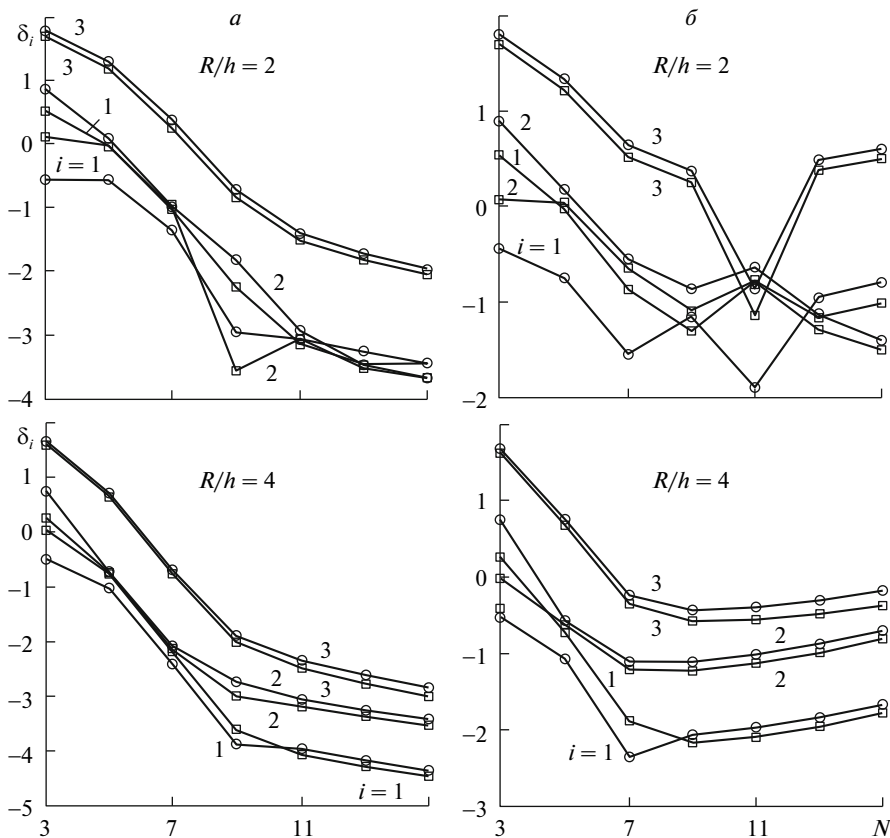


Рис. 4. Логарифмические погрешности расчета поперечных напряжений δ_i ($i = 1, 2, 3$) на внутренней поверхности (кривые с кружками) и внешней поверхности (кривые с квадратами) цилиндрической оболочки с геометрическими параметрами $R/h = 2, 4$ на основе данного метода (а) и метода эквидистантных отсчетных поверхностей (б)

описанию напряженного состояния оболочки в зоне краевого эффекта для полиномов Лагранжа высокой степени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 13-01-00155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение задачи статики для упругой оболочки в пространственной постановке // Докл. РАН. 2011. Т. 439. № 5. С. 613–616.
4. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. On the use of sampling surfaces method for solution of 3D elasticity problems for thick shells // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. V. 92. № 12. P. 910–920.
5. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Advanced formulation for laminated composite shells: 3D stress analysis and rigid-body motions // Composite Structures. 2013. V. 95. P. 236–246.
6. Runge C. Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1901. V. 46. S. 224–243.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.
8. Победра Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
9. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 308 с.