

**РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК
ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ***

Г. М. Куликов, С. В. Плотникова

*Кафедра «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Ключевые слова: метод отсчетных поверхностей; слоистые оболочки; термоупругость; точное трехмерное решение; функциональные материалы.

Аннотация: Представлена реализация метода отсчетных поверхностей, позволяющая получать точные трехмерные решения для термоупругих слоистых оболочек из функциональных материалов. Согласно данному методу, в каждом слое оболочки вводятся неравномерно расположенные отсчетные поверхности, параллельные срединной поверхности оболочки, температуры и перемещения которых выбираются затем в качестве искоемых функций. Существенным является локализация отсчетных поверхностей внутри каждого слоя в узлах полинома Чебышева. Это позволяет равномерно минимизировать погрешность приближения интерполяционными полиномами Лагранжа, и, следовательно, дает возможность применять интерполяционные полиномы Лагранжа высокой степени.

Традиционный путь построения теории термоупругих оболочек состоит в разложении перемещений в степенные ряды относительно поперечной координаты, отсчитываемой вдоль внешней нормали к срединной поверхности. Для приближенного представления поля перемещений можно воспользоваться конечными отрезками степенных рядов, поскольку основная цель теории оболочек состоит в получении приближенных решений задач трехмерной теории термоупругости. Однако кажущееся преимущество этой теории теряется при ее применении в задачах статики толстых оболочек, в которых для получения приемлемых результатов необходимо удерживать достаточно большое число членов в соответствующих разложениях [1].

Более продуктивный подход [2 – 8] связан с введением внутри n -го слоя оболочки I_n отсчетных поверхностей $\Omega^{(n)1}, \Omega^{(n)2}, \dots, \Omega^{(n)I_n}$, параллельных срединной поверхности, с целью использования векторов перемещений $u^{(n)1}, u^{(n)2}, \dots, u^{(n)I_n}$ и температур $T^{(n)1}, T^{(n)2}, \dots, T^{(n)I_n}$ этих поверхностей в качестве искоемых функций, где $I_n \geq 3$. При этом поверхности $\Omega^{(n)1}$ и $\Omega^{(n)I_n}$ могут совпадать с поверхностями раздела слоев $\Omega^{[n-1]}$ и Ω^n . Здесь, индекс n указывает на принадлежность некоторой величины к n -му слою и принимает значения 1, 2, ..., N ,

* По материалам доклада на конференции ММТТ-27 (см. Вестник ТГТУ, т. 20, № 4).

где N – число слоев. Такой выбор искомым функций с последующим использованием полиномов Лагранжа степени $I_n - 1$ в пространственных аппроксимациях перемещений и температуры в пределах n -го слоя позволяет представить разрешающие уравнения данной теории оболочек высокого порядка в достаточно компактной форме и построить деформационные соотношения, которые точно представляют смещение оболочки как жесткого тела в системе криволинейных координат срединной поверхности.

Теория оболочек высокого порядка [2] основана на использовании эквидистантных отсчетных поверхностей, при этом лицевые поверхности оболочки выбираются в качестве отсчетных. Это ограничивает применение данной теории для расчета толстых оболочек [3]. Дело в том, что предложенная пространственная полиномиальная интерполяция вектора перемещений и температуры с использованием полиномов Лагранжа высокой степени может приводить вследствие феномена Рунге к значительной осцилляции полиномиальных аппроксимаций в зоне краевого эффекта. Этот феномен был открыт Рунге при изучении погрешности полиномиальной интерполяции для приближения некоторых функций на равномерной сетке. С возрастанием степени полинома погрешность интерполяции может стремиться к бесконечности. В численном анализе для борьбы с указанным явлением в качестве узлов интерполяции принято использовать корни многочлена Чебышёва, что помогает существенно улучшить поведение полиномиальных аппроксимаций высокой степени, для которых ошибка интерполяции стремится к нулю при $I_n \rightarrow \infty$. Таким образом, для поперечных координат отсчетных поверхностей в пределах n -го слоя оболочки предлагается использовать следующие выражения:

$$\theta_3^{(n)1} = \theta_3^{[n-1]}; \quad \theta_3^{(n)I_n} = \theta_3^{[n]}; \quad \theta_3^{(n)m_n} = \frac{1}{2}(\theta_3^{[n-1]} + \theta_3^{[n]}) - \frac{1}{2}h_n \cos\left(\pi \frac{2m_n - 3}{2(I_n - 2)}\right),$$

где $\theta_3^{[n-1]}$, $\theta_3^{[n]}$ – поперечные координаты поверхностей раздела слоев $\Omega^{[n-1]}$ и $\Omega^{[n]}$; $h_n = \theta_3^{[n]} - \theta_3^{[n-1]}$ – толщина n -го слоя, $m_n = 2, 3, \dots, I_n - 1$.

Предложенный выбор поперечных координат дает возможность находить решение трехмерных задач статики для термоупругих толстых и тонких оболочек из функциональных материалов с любой наперед заданной точностью при достаточно большом числе отсчетных поверхностей. Рассмотрен расчет шарнирно опертых прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек из функциональных материалов под действием синусоидального температурного нагружения и проведено сравнение с известными аналитическими решениями пространственной теории термоупругости.

В качестве примера рассмотрим однослойную квадратную пластину со стороной a из функционального материала, шарнирно опертую по краям и находящуюся под действием температурной нагрузки. Координаты $\theta_1 \in [0; a]$ и $\theta_2 \in [0; a]$ параллельны сторонам пластины. Аналитическое решение задачи может быть получено методом двойных рядов Фурье. Чтобы удовлетворить граничным условиям, решения ищем в виде

$$\Theta^{(n)i_n} = \sum_{r,s} \Theta_{rs}^{(n)i_n} \sin \frac{r\pi\theta_1}{a} \sin \frac{s\pi\theta_2}{a}; \quad u_1^{(n)i_n} = \sum_{r,s} u_{1rs}^{(n)i_n} \cos \frac{r\pi\theta_1}{a} \sin \frac{s\pi\theta_2}{a};$$

$$u_2^{(n)i_n} = \sum_{r,s} u_{2rs}^{(n)i_n} \sin \frac{r\pi\theta_1}{a} \cos \frac{s\pi\theta_2}{a}; \quad u_3^{(n)i_n} = \sum_{r,s} u_{3rs}^{(n)i_n} \sin \frac{r\pi\theta_1}{a} \sin \frac{s\pi\theta_2}{a},$$

где $\Theta^{(n)i_n} = T^{(n)i_n} - T_0$ – приращение температуры по сравнению с базовым уровнем.

Функциональный материал представляет собой алюминиевую матрицу с керамическими включениями, объемная концентрация включений изменяется от $V_c^- = 0$ на нижней поверхности пластины до $V_c^+ = 0,5$ на верхней поверхности. Зависимость объемной концентрации керамических включений по толщине пластины имеет вид:

$$V_c = V_c^- + (V_c^+ - V_c^-) \left(\frac{1}{2} + z \right)^n, \quad n = 2, \quad z = \frac{\theta_3}{h}, \quad \theta_3 \in [-h/2; h/2].$$

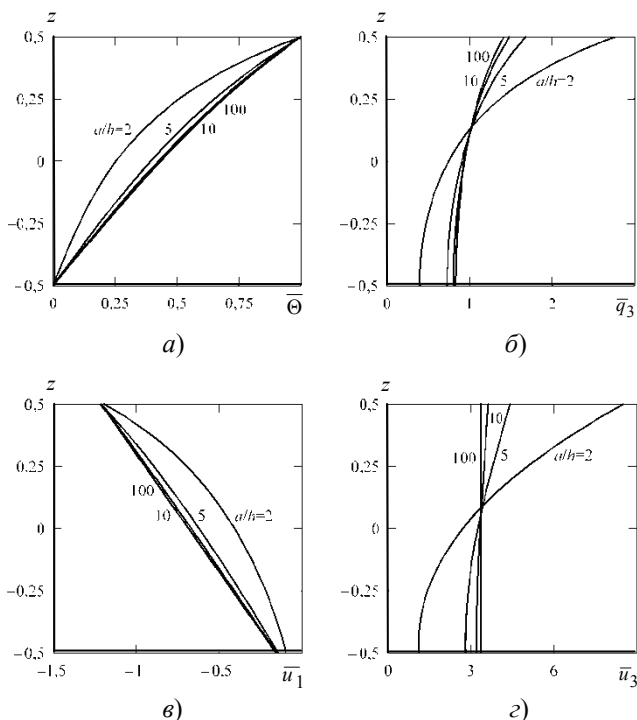
Физические характеристики материалов соответствуют данным, приведенным в работе [9]: для алюминия модуль упругости $E_m = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,3$, коэффициент теплопроводности $\kappa_m = 233$ Вт/(м·К), коэффициент температурного расширения $\alpha_m = 23,4 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹; для керамики $E_c = 4,27 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_c = 0,17$, $\kappa_c = 65$ Вт/(м·К), $\alpha_c = 4,3 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹. По толщине пластины физические характеристики вычисляются с помощью метода Мори-Танака [9].

Температурная нагрузка задана в виде:

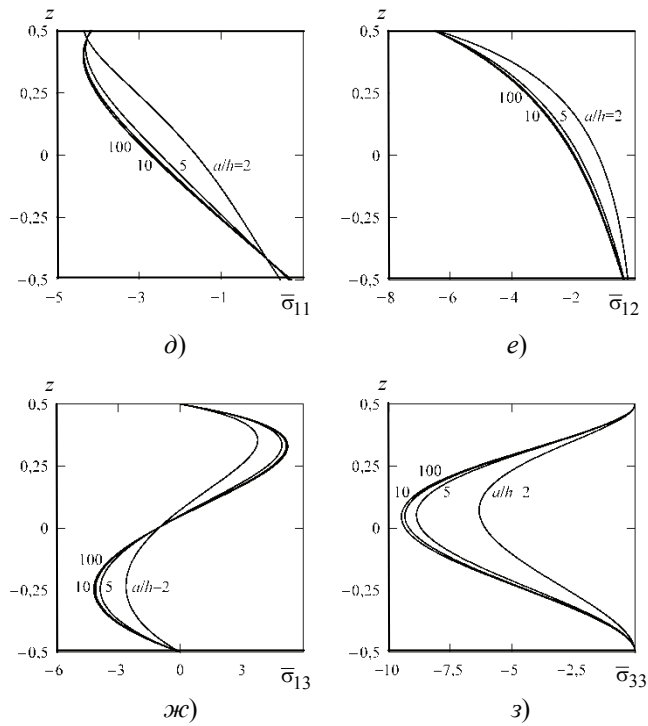
$$\Theta^{[0]} = 0, \quad \Theta^{[N]} = \Theta_0 \sin \frac{\pi \theta_1}{a} \sin \frac{\pi \theta_2}{a}.$$

На рисунке представлены распределения по толщине пластины безразмерных температуры, поперечной компоненты теплового потока, перемещений и напряжений в характерных точках при различных значениях параметра a/h :

$$\bar{\Theta} = \Theta \left(\frac{a}{2}, 0, z \right) / \Theta_0; \quad \bar{q}_3 = -q_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right) h / k_m \Theta_0; \quad \bar{u}_1 = 10u_1 \left(0, \frac{a}{2}, z \right) / \alpha_m \Theta_0 a,$$



Распределение температуры (а), теплового потока (б) и перемещений (в, г) для пластины из функционального материала при $I_1 = 13$



Распределение напряжений (д, е, ж, з) (продолжение рисунка)

Результаты расчета для пластины из функционального материала при $a/h=5$

I_1	$\bar{\Theta}(0)$	$\bar{q}_3(-0,5)$	$\bar{u}_1(0,5)$	$\bar{u}_3(0,5)$	$\bar{\sigma}_{11}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{12}(0,5)$	$\bar{\sigma}_{13}(0,25)$	$\bar{\sigma}_{12}(0,5)$
3	0,39780	0,59119	-1,2096	4,4213	-3,1907	-6,4775	4,3279	-266,58
5	0,39379	0,72392	-1,2117	4,4198	-4,1612	-6,4890	5,0419	-6,3122
7	0,39375	0,73125	-1,2101	4,4111	-4,1765	-6,4804	4,2085	-8,7894
9		0,73158			-4,1764		4,2259	-8,6803
11		0,73160			4,2265		-8,6830	
13					-4,1763		4,2264	-8,6829
15					-4,1764			
[9]	0,3938	0,7316						

$$\bar{u}_3 = 10^2 u_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right) h / \alpha_m \Theta_0 a^2; \quad \bar{\sigma}_{11} = 10 \sigma_{11} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right) / E_m \alpha_m \Theta_0;$$

$$\bar{\sigma}_{12} = 10 \sigma_{12} (0, 0, z) / E_m \alpha_m \Theta_0; \quad \bar{\sigma}_{13} = 10^2 \sigma_{13} \left(0, \frac{a}{2}, z \right) a / E_m \alpha_m \Theta_0 h;$$

$$\bar{\sigma}_{33} = 10^2 \sigma_{33} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z \right) a^2 / E_m \alpha_m \Theta_0 h^2.$$

В таблице представлен анализ сходимости метода отсчетных поверхностей. Как видим, при выборе достаточного числа отсчетных поверхностей возможно получение решения трехмерной задачи термоупругости с любой наперед заданной точностью. Приведено сравнение с точным решением пространственной теории термоупругости [9].

Список литературы

1. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости : учебник / А. Д. Коваленко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 308 с.
2. Куликов, Г. М. Решение задачи статики для упругой оболочки в пространственной постановке / Г. М. Куликов, С. В. Плотникова // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 439, № 5. – С. 613 – 616.
3. Kulikov, G. M. Advanced Formulation for Laminated Composite Shells: 3D Stress Analysis and Rigid-Body Motions / G. M. Kulikov, S. V. Plotnikova // Composite Structures. – 2013. – Vol. 95. – P. 236 – 246.
4. Цилиндрический изгиб слоистой композитной оболочки / Г. М. Куликов [и др.] // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 672 – 682.
5. Куликов, Г. М. Точное решение для цилиндрических оболочек из функциональных пьезоэлектрических материалов / Г. М. Куликов, А. В. Ерофеев // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 390 – 401.
6. Куликов, Г. М. Трехмерный термоупругий анализ слоистых анизотропных пластин / Г. М. Куликов, А. А. Мамонтов // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2013. – Т. 19, № 4. – С. 853 – 863.
7. Kulikov, G. M. Heat Conduction Analysis of Laminated Shells by a Sampling Surfaces Method / G. M. Kulikov, S. V. Plotnikova // Mechanics Research Communications. – 2014. – Vol. 55. – P. 59 – 65.
8. Куликов, Г. М. Аналитический метод решения пространственных задач термоупругости для композитных оболочек / Г. М. Куликов, С. В. Плотникова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – № 2. – С. 54 – 62.
9. Vel, S. S. Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates / S. S. Vel, R. C. Batra // AIAA Journal. – 2002. – Vol. 40, No. 7. – P. 1421 – 1433.

Solution of Three-Dimensional Problems of Thermoelasticity for Laminated Shells Made of Functionally Graded Materials

G. M. Kulikov, S. V. Plotnikova

*Department “Applied Mathematics and Mechanics”, TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Keywords: functionally graded materials; laminated shells; sampling surfaces method; thermoelasticity; 3D exact solution.

Abstract: An implementation of the method of sampling surfaces is presented for the obtaining of three-dimensional exact solutions for thermoelastic functionally graded laminated shells. According to the sampling surfaces method, we introduce inside every layer not equally spaced sampling surfaces parallel to the middle surface of the shell in order to choose temperatures and displacements of these surfaces as basic shell variables. It is important that the sampling surfaces are located inside each layer at Chebyshev polynomial nodes. This fact allows one to minimize uniformly the error due to Lagrange interpolation, i.e. the use of Lagrange polynomials of high degree becomes possible.

References

1. Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* (Fundamentals of thermoelasticity), Kiev: Naukova dumka, 1970, 308 p.
2. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 8, pp. 448-451.

3. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 236-246.
 4. Kulikov G.M., Mamontov A.A., Plotnikova S.V., Erofeev A.V. *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 672-682.
 5. Kulikov G.M., Erofeev A.V. *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 390-401.
 6. Kulikov G.M., Mamontov A.A. *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 853-863.
 7. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Mechanics Research Communications*, 2014, vol. 55, pp. 59-65.
 8. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 132-139.
 9. Vel S.S., Batra R.C. *AIAA Journal*, 2002, vol.40, no. 7, pp. 1421-1433.
-

Lösung der dreidimensionalen Aufgaben der Thermoelastizität für die blättrigen Hüllen aus den funktionalen Materialien

Zusammenfassung: Es ist die Realisierung der Methode der Abzählenoberflächen, die die genauen dreidimensionalen Lösungen für die thermoelastischen blättrigen Hüllen aus den funktionalen Materialien zu bekommen zulässt, dargelegt. Laut der gegebenen Methode werden in jeder Schicht der Hülle die ungleichmäßig gelegenen Abzählenoberflächen, die zu die Mitteloberfläche der Hülle parallel sind eingeführt, deren Temperaturen und Umstellungen dann als gesuchte Funktionen gewählt werden. Wesentlich ist die Lokalisation der Abzählenoberflächen innerhalb jeder Schicht in den Knoten des Polynoms von Tschebyschew. Das lässt gleichmäßig zu, den Fehler der Annäherung von den Interpolisationspolynomen von Lagrange zu minimisieren, und gibt die Möglichkeit, die Interpolisationspolynome von Lagrange der hohen Stufe zu verwenden.

Solution des problèmes à trois dimensions de la thermoélasticité pour les enveloppes laminaires à partir des matériaux fonctionnels

Résumé: Est présentée la réalisation de la méthode des surfaces de repère permettant d'obtenir les solutions exactes pour les enveloppes laminaires thermoélastiques à partir des matériaux fonctionnels. Suivant cette méthode dans chaque couche de l'enveloppe sont introduites les surfaces de repère situées inégalement. Importante est la localisation des surfaces de repère à l'intérieur de chaque couche dans les noeuds du polynôme de Chebyshev. Cela permet de minimiser les erreurs et donne la possibilité d'appliquer les polynômes interpolaires de Lagrange de haut degré.

Авторы: *Куликов Геннадий Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика»; *Плотникова Светлана Валерьевна* – доктор технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Ярцев Виктор Петрович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Конструкции зданий и сооружений», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».